Introduction à l'**Analyse Numérique**

Examen

(16 août 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Chacune des questions ci-dessous exige des explications mathématiques et algorithmiques. Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses (sur les feuilles qui suivent et qui doivent être rendues à la fin de chaque partie de l'examen) en veillant tout particulièrement à la qualité de vos justifications. Justifier le choix d'un algorithme, les raisons pour lesquelles il doit fonctionner sur les données de la question,... est très important. Si vous hésitez quant à la nécessité de justifier un point précis, n'hésitez pas à demander.
- La qualité du *code* influencera votre note. Veillez à respecter les conseils donnés durant l'année : bonne factorisation, emploi de structures de données adaptées, interfaces cohérentes, documentation appropriée,...
- L'examen se déroule en deux parties. À la fin de chaque partie, vous *devez* remettre l'ensemble du code qui vous a permis de répondre aux questions (nous devons *pouvoir reproduire* votre démarche) ainsi que les fichiers additionnels demandés dans le corps des questions. Si une librairie utilisée n'a pas été écrite par vous, le(s) fichier(s) la contenant doi(ven)t mentionner explicitement son origine.
- Un système de gestion de compilation sera présent tel qu'exigé aux TPs durant l'année (`ant` pour JAVA, `make` ou `ocamlbuild` pour C, C++, FORTRAN, OCAML,...).
- Si vous faites cet examen sur votre propre ordinateur, vous consentez implicitement aux règles suivantes :
  - Toute émission sans fil émanant de votre ordinateur ou de votre téléphone portable a pour conséquence votre exclusion immédiate et votre échec ;
  - En cas de suspicion de fraude, vous autorisez (et fournissez) un accès illimité à votre machine. Les informations qui seront rendues publiques seront uniquement celles qui seront utiles dans le cadre de la preuve de la fraude (si avérée) ;
  - Vous êtes responsables de votre ordinateur et êtes sensés savoir effectuer les manœuvres nécessaires pour réaliser le travail et le remettre sous forme d'un tarball sur une clef USB. Le prétexte de la défaillance de votre machine ou de votre incapacité à realiser certaines manipulations pour « excuser » votre échec n'est pas recevable.

Question 1. Soit le cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$ et soit une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1\big([0,1];\mathbb{R}^2\big)$ telle que $\varphi(0) = (0,0) =: A$ et $\varphi(1) = B$ pour une certain $B \in \mathbb{R}^2$ tel que[1] $\|B\| > 1$.

(a) Montrez qu'il existe un $t \in \,]0,1[$ tel que $\varphi(t)$ appartient au cercle unité (voir la figure 1).

(b) Montrez que, sous la condition $\forall t \in \,]0,1[$, $\big(\varphi(t)\big|\partial_t\varphi(t)\big) > 0$, le point d'intersection entre les deux courbes est unique. Veillez à la qualité de votre rédaction et énoncez les résultats que vous utilisez.

[1] La notation $\|x\|$ désigne la norme Euclidienne de x.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

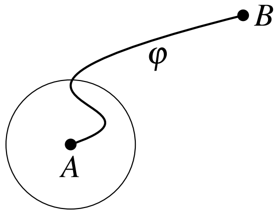

FIGURE 1 – Représentation du problème

(c) Écrivez une routine qui, étant donné une fonction φ, retourne un point d'intersection entre la courbe décrite par φ et le cercle unité.

(d) Soit φ_1 une fonction dont l'image est le segment de droite reliant le point A au point $B = (2, 2\sqrt{3})$. Donnez une expression de φ_1 et représentez la courbe correspondante. *Prouvez* qu'il n'y a qu'une seule intersection entre $\operatorname{Im}\varphi_1$ et le cercle unité.

(e) Donnez le point d'intersection du cercle et de la courbe définie par φ_1.

φ_1	

(f) Soit φ_2 une fonction dont l'image est le demi-cercle dont un diamètre est le segment de droite reliant le point A au point $B = (2, 2\sqrt{3})$ et tel que $(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) \in \operatorname{Im}\varphi_2$. Donnez une expression pour φ_2 et représentez *numériquement* la courbe correspondante. Prouvez qu'il n'y a qu'une seule intersection entre $\operatorname{Im}\varphi_2$ et le cercle unité.

(g) Donnez le point d'intersection du cercle et de la courbe définie par φ_2.

φ_2	

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Introduction à l'Analyse Numérique

Examen (16 août 2013)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Nous voulons mesurer la vitesse de convergence d'une méthode pour résoudre une équation différentielle ordinaire d'ordre 2. Plus précisément, nous souhaitons étudier des équations différentielles du type

$$u''(x) = f\big(u(x)\big) \tag{1}$$

définies sur $[0,\pi]$ et soumises aux conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$.

Fixons f et $N \geqslant 2$. La première étape de la méthode est de considérer $N+1$ nœuds équidistants $x_0, \dots, x_N$ sur $[0,\pi]$ (avec $x_0 = 0$ et $x_N = \pi$). Nous définissons $h := \pi/N$. Le but de la méthode est de donner en ces nœuds x_i une approximation, notée $\tilde{u}(x_i)$, de la solution exacte u de l'équation différentielle (1). Commençons par poser $\tilde{u}(x_0) = u(x_0)$ puisque cette dernière valeur est connue. Pour $\tilde{u}(x_1)$, nous remplaçons $u'(x_0)$ dans la condition initiale $u'(x_0) = 1$ par la différence divisée du premier ordre

$$u'(x_0) \approx u[x_1, x_0] = \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h}.$$

Comme nous connaissons $u(x_0)$ et $u'(x_0)$, nous pouvons en déduire une approximation de $u(x_1)$. C'est cette approximation que nous prendrons pour $\tilde{u}(x_1)$. Ensuite, dans l'équation différentielle (1), nous remplaçons $u''(x_1)$ par une différence divisée du deuxième ordre

$$f\big(u(x_1)\big) = u''(x_1) \approx 2u[x_0, x_1, x_2] = \frac{u(x_0) - 2u(x_1) + u(x_2)}{h^2}.$$

Dès lors, comme des approximations sont connues pour $u(x_0)$ et $u(x_1)$, nous pouvons en déduire une approximation $\tilde{u}(x_2)$ de $u(x_2)$. L'évaluation aux autres nœuds se fait de manière itérative : pour $i = 2, \dots, N-1$, nous utilisons l'approximation

$$f\big(u(x_i)\big) = u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}$$

afin d'obtenir une approximation $\tilde{u}(x_{i+1})$ de $u(x_{i+1})$ à partir d'approximations de $u(x_i)$ et $u(x_{i-1})$.

(a) Écrivez une routine qui, étant donné f et N, implémente la méthode ci-dessus et retourne un tableau contenant les évaluations $\big(\tilde{u}(x_i)\big)_{i=0,\dots,N}$.

(b) Pour $f(u) = -u$ et $N = 30$, écrivez dans la colonne de droite les valeurs demandées (avec 5 chiffres après la virgule).

$\tilde{u}(0)$	
$\tilde{u}(x_1)$	
$\tilde{u}(x_5)$	
$\tilde{u}(\pi)$	

(c) Pour $f(u) = -u$, l'équation différentielle peut être explicitement résolue. Calculez et donnez la solution u.

(d) Écrivez une routine estimant l'erreur $e(f,N)$ commise, c'est-à-dire

$$e(f,N) := \max_{i=0,\dots,N} |u(x_i) - \tilde{u}(x_i)|.$$

Écrivez (avec 8 chiffres après la virgule) l'estimation obtenue pour $f(u) = -u$ et $N = 30$ ci-dessous :

$e\big(-u, 30\big)$	

(e) On dit que le schéma d'approximation est d'ordre p si quelle que soit la fonction régulière f, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $N \geqslant 2$,

$$e(f,N) \leqslant C\Big(\frac{1}{N}\Big)^p.$$

Pour notre fonction $f(u) = -u$, estimez la valeur de p par *expérimentation numérique*. La méthode des moindres carrés peut vous aider à approcher la valeur de p. Motivez vos choix et expliquez votre démarche.

p	

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Introduction à l'Analyse Numérique

Nom :
Prénom :
Section :

Examen (17 août 2013)

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Chacune des questions ci-dessous exige des explications mathématiques et algorithmiques. Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses (sur les feuilles qui suivent et qui doivent être rendues à la fin de chaque partie de l'examen) en veillant tout particulièrement à la qualité de vos justifications. Justifier le choix d'un algorithme, les raisons pour lesquelles il doit fonctionner sur les données de la question,... est très important. Si vous hésitez quant à la nécessité de justifier un point précis, n'hésitez pas à demander.
- La qualité du *code* influencera votre note. Veillez à respecter les conseils donnés durant l'année : bonne factorisation, emploi de structures de données adaptées, interfaces cohérentes, documentation appropriée,...
- L'examen se déroule en deux parties. À la fin de chaque partie, vous *devez* remettre l'ensemble du code qui vous a permis de répondre aux questions (nous devons *pouvoir reproduire* votre démarche) ainsi que les fichiers additionnels demandés dans le corps des questions. Si une librairie utilisée n'a pas été écrite par vous, le(s) fichier(s) la contenant doi(ven)t mentionner explicitement son origine.
- Un système de gestion de compilation sera présent tel qu'exigé aux TPs durant l'année (`ant` pour JAVA, `make` ou `ocamlbuild` pour C, C++, FORTRAN, OCAML,...).
- Si vous faites cet examen sur votre propre ordinateur, vous consentez implicitement aux règles suivantes :
  - Toute émission sans fil émanant de votre ordinateur ou de votre téléphone portable a pour conséquence votre exclusion immédiate et votre échec ;
  - En cas de suspicion de fraude, vous autorisez (et fournissez) un accès illimité à votre machine. Les informations qui seront rendues publiques seront uniquement celles qui seront utiles dans le cadre de la preuve de la fraude (si avérée) ;
  - Vous êtes responsables de votre ordinateur et êtes sensés savoir effectuer les manœuvres nécessaires pour réaliser le travail et le remettre sous forme d'un tarball sur une clef USB. Le prétexte de la défaillance de votre machine ou de votre incapacité à realiser certaines manipulations pour « excuser » votre échec n'est pas recevable.

Question 3. Pour cette question, nous allons nous atteler à déterminer les bons paramètres pour qu'un saut en *skateboard* se passe de la manière la plus sûre possible.

Le dispositif de saut se compose d'une rampe de lancement, qui permet à la personne de prendre son élan, et d'une rampe de récupération sur laquelle le sauteur finit sa course. Chacune des deux rampes est modélisée par une courbe paramétrique, c'est-à-dire qu'elle est l'image d'une fonction[1]

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \gamma(s) = \big(\gamma_1(s), \gamma_2(s)\big) \qquad \text{telle que } \forall s \in \mathbb{R},\ \|\partial_s \gamma(s)\| \neq 0,$$

[1]Nous utilisons la notation $\|x\|$ pour la norme Euclidienne de x.

Nom :

Prénom :

Section :

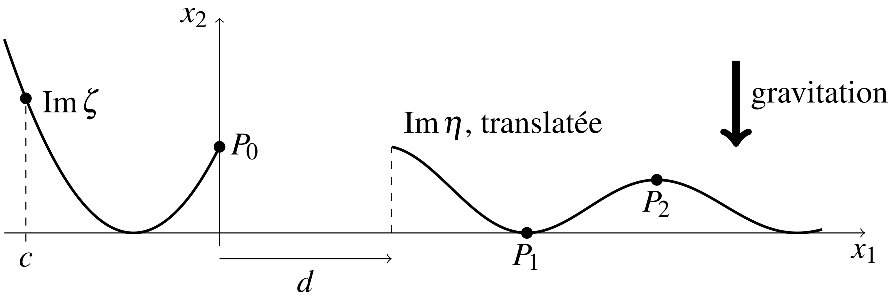

FIGURE 1 – Géométrie du problème.

où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous supposons que γ est deux fois continuement dérivable. Pour la situation qui nous intéresse (voir fig. 1), la rampe de lancement est modélisée par la fonction ζ tandis que nous supposons que la rampe de récupération peut être déplacée et sera donc modélisée par l'image de η translatée horizontalement d'une distance d. Les fonctions ζ et η sont données par[2] :

$$\zeta : \left]-\infty, 0\right] \to \mathbb{R} : s \mapsto \left(s, \tfrac{1}{2}(s+2)^2\right) \qquad \text{et} \qquad \eta : [0, \infty[\to \mathbb{R} : s \mapsto \left(s, \frac{1+\cos s}{1+0{,}1s}\right).$$

Le sauteur part avec une vitesse nulle du point de $\operatorname{Im}\zeta$ d'abscisse $c < 0$. Nous supposons que sa masse vaut $m = 1$ kg et qu'il subit uniquement la force de gravitation lorsqu'il quitte la rampe.

Dans un premier temps, nous allons supposer qu'aucun frottement n'est exercé par les rampes. On rappelle que dans ce cas l'énergie $\frac{1}{2}m\|\partial_t x(t)\|^2 + mgx_2(t)$, où $t \mapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ est la position du sauteur en fonction du temps, est conservée. La constante de gravitation terrestre g vaut approximativement $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

(a) En fonction de $c < 0$, déterminez analytiquement la vitesse $v \in \mathbb{R}^2$ du sauteur à la fin de la rampe de lancement (c'est-à-dire au point $P_0 = \zeta(0)$ de la figure 1).

(b) En fonction de $c < 0$, déterminez analytiquement la distance d à laquelle il faut positionner la rampe de récupération pour que l'athlète retombe au début ce celle-ci à la fin de son saut. Donnez les valeurs de d correspondant à $c = -5$ et $c = -6$ ci-dessous.[3]

$c = -5$	$d =$
$c = -6$	$d =$

Supposons maintenant que les rampes exercent une force de frottement « visqueuse » de direction opposée à la vitesse et d'amplitude $\mu_1 > 0$ (resp. $\mu_2 > 0$) fois cette vitesse pour la rampe ζ (resp. η). Décrire le mouvement du mobile le long de la rampe γ ($\gamma = \zeta$ ou $\gamma = \eta$ selon les besoins) revient à déterminer comment la variable s, qui paramétrise la courbe, varie en fonction du temps. Autrement dit, on cherche une fonction

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto S(t)$$

[2] Les coordonnées sont données en mètres.

[3] Le code qui sert à calculer les réponses numériques que vous écrivez doit être bien entendu remis. Si vous utilisez une calculatrice au lieu de code, les détails doivent être écrits sur ces feuilles.

telle que $t \mapsto \gamma(S(t))$ donne la trajectoire du mobile dans l'espace. En faisant le bilan des forces, vous avez vu que S doit satisfaire l'équation[4] :

$$\|\partial_s\gamma(S)\|^2\,\partial_t^2 S = -\big(\partial_s\gamma(S)\big|\partial_s^2\gamma(S)\big)\,(\partial_t S)^2 - g\,\partial_s\gamma_2(S) - \frac{\mu}{m}\|\partial_s\gamma(S)\|^2\,\partial_t S \tag{1}$$

où μ vaut μ_1 ou μ_2 selon que γ est ζ ou η respectivement.

(c) Écrivez une routine qui, étant donné un point de départ donné par $c < 0$, retourne[5] (si possible) le couple (t, v) où t est le temps nécessaire pour atteindre la fin de la rampe de lancement et $v \in \mathbb{R}^2$ est le *vecteur* vitesse du sauteur *dans l'espace* à ce moment là. Nous ne nous attendons pas à une routine qui marche pour un $c < 0$ arbitraire mais la stratégie que vous employez — que vous devez expliquer ci-dessous — doit être suffisamment générale pour pouvoir être appliquée à tous les cas du tableau qui ci-après (sans les distinguer explicitement bien sûr). Grâce à cette routine, complétez le tableau suivant.[6]

$\mu_1 = 0$, $c = -5$	$t =$	$v =$
$\mu_1 = 0$, $c = -6$	$t =$	$v =$
$\mu_1 = 0{,}25$, $c = -5$	$t =$	$v =$
$\mu_1 = 0{,}25$, $c = -6$	$t =$	$v =$
$\mu_1 = 0{,}5$, $c = -10$	$t =$	$v =$

(d) Écrivez une routine qui, en fonction de $c < 0$, retourne la distance d à laquelle il faut positionner la rampe de récupération pour que le sauteur retombe au début ce celle-ci à la fin de son saut. Complétez le tableau ci-après.[6]

$\mu_1 = 0$, $c = -5$	$d =$
$\mu_1 = 0$, $c = -6$	$d =$
$\mu_1 = 0{,}25$, $c = -5$	$d =$
$\mu_1 = 0{,}25$, $c = -6$	$d =$
$\mu_1 = 0{,}5$, $c = -10$	$d =$

Lorsque la personne retombe sur la rampe de récupération, on supppose qu'elle garde uniquement la partie de sa vitesse qui est tangente à la courbe η puis évolue le long de η. Lorsqu'on fait varier

[4]La notation $(x|y)$ désigne le produit scalaire usuel. On a donc $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
[5]Nous rappelons qu'il y a une différence entre *retourner* le résultat et l'*imprimer* à l'écran.
[6]Les réponses numériques doivent comporter 5 chiffres après la virgule.

c ci-dessous, on considère toujours que la rampe de récupération est mise à la bonne distance d déterminée dans la question (d).

(e) Écrivez une routine qui, étant donné $c < 0$, retourne le temps total du parcours pour atteindre P_1 (voir figure 1). Complétez le tableau ci-dessous avec les réponses numériques[7] que cette routine vous retourne.

$\mu_1 = 0{,}25,\ \ \mu_2 = 0{,}1,\ \ c = -5$	temps $=$
$\mu_1 = 0{,}25,\ \ \mu_2 = 0{,}1,\ \ c = -6$	temps $=$

(f) Donnez $c < 0$ tel que le sauteur arrive en P_2 avec une vitesse nulle pour les valeurs ci-après de μ_1 et μ_2. Veuillez expliquer ci-dessous votre démarche. Si certaines valeurs sont fixées grâce à des graphes que vous avez tracés, joignez ceux-ci au code que vous remettez (et référencez les dans vos explications !).

$\mu_1 = 0{,}25,\ \ \mu_2 = 1{,}7$	$c =$

[7] Celles-ci doivent comporter 5 chiffres après la virgule.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.