Introduction à l'**Analyse Numérique**

Examen

(25 août 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Chacune des questions ci-dessous exige des explications mathématiques et algorithmiques. Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses (sur les feuilles qui suivent et qui doivent être rendues à la fin de chaque partie de l'examen) en veillant tout particulièrement à la qualité de vos justifications. Justifier le choix d'un algorithme, les raisons pour lesquelles il doit fonctionner sur les données de la question,... est très important. Si vous hésitez quant à la nécessité de justifier un point précis, n'hésitez pas à demander.
- La qualité du *code* influencera votre note. Veillez à respecter les conseils donnés durant l'année : bonne factorisation, emploi de structures de données adaptées, interfaces cohérentes, documentation appropriée,...
- L'examen se déroule en deux parties. À la fin de chaque partie, vous *devez* remettre l'ensemble du code qui vous a permis de répondre aux questions (nous devons *pouvoir reproduire* votre démarche) ainsi que les fichiers additionnels demandés dans le corps des questions. Si une librairie utilisée n'a pas été écrite par vous, le(s) fichier(s) la contenant doi(ven)t mentionner explicitement son origine.
- Un système de gestion de compilation sera présent tel qu'exigé aux TPs durant l'année (`ant` pour JAVA, `make` ou `omake` pour C, C++, FORTRAN, OCAML,...).
- Si vous faites cet examen sur votre propre ordinateur, vous consentez implicitement aux règles suivantes :
  - Toute émission sans fil émanant de votre ordinateur ou de votre téléphone portable a pour conséquence votre exclusion immédiate et votre échec ;
  - En cas de suspicion de fraude, vous autorisez (et fournissez) un accès illimité à votre machine. Les informations qui seront rendues publiques seront uniquement celles qui seront utiles dans le cadre de la preuve de la fraude (si avérée) ;
  - Vous êtes responsables de votre ordinateur et êtes sensés savoir effectuer les manœuvres nécessaires pour réaliser le travail. Le prétexte de la défaillance de votre machine ou de votre incapacité à realiser certaines manipulations pour « excuser » votre échec n'est pas recevable.

---

1 Première partie

Question 1. Soit $a \geqslant 0$. Nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} x^2(1-x^2) = (y-1)^2, \\ y = e^{|ax|}. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Représentez sur un même dessin les courbes de chacune des deux équations du système pour $a = 0$, $a = 0.5$ et $a = 2$.

Nom :
Prénom :
Section :

(b) Donnez les solutions du système pour $a = 0$. Justifiez ci-dessous votre réponse.

Réponse :	$a = 0$	

(c) Soient $b > 0$ et deux fonctions $f, g : [0, b] \to \mathbb{R}$ dérivables sur $]0, b[$ et continues sur $[0, b]$. *Prouvez* que si $f(0) = g(0)$ et $\partial f > \partial g$ sur $]0, b[$, alors 0 est l'unique racine de la fonction $f - g$.

(d) Montrez rigoureusement qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $a \geqslant r$, le système possède une unique solution. (INDICATION : utilisez le point précédent.)

(e) Pour $0 < a < r$, étudiez le nombre de solutions du système. Expliquez votre démarche et prouvez vos affirmations.

(f) Écrivez une routine qui, étant donné $a \geqslant 0$, *retourne* l'ensemble des solutions du système.

(g) Écrivez ci-dessous l'ensemble des solutions de (1) pour $a = 0.5$, $a = 1$ et $a = e/3$.

Réponses numériques :	$a = 0.5$	
	$a = 1$	
	$a = e/3$	

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Considérons $n+1$ points d'abscisses distinctes $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

(a) Écrivez ci-dessous un algorithme qui prend comme argument les différences divisées $y[x_n]$, $y[x_n, x_{n-1}]$, $y[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$, …, $y[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]$ et retourne le polynôme d'interpolation.

(b) Prouvez l'exactitude de votre routine en déterminant le(s) invariant(s) adéquat(s) et en prouvant qu'ils en sont effectivement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. En utilisant le principe des « moindres carrés », nous sommes intéressés à approcher au mieux un nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,N}$, où $N \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $x_i > 0$ et $y_i > 1$, par une fonction exponentielle du type $y = \mathrm{e}^{ax}$ où $a \geqslant 0$.

(a) Donnez une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que le minimum de f nous donne le ou les a recherchés.

(b) Donnez une *condition nécessaire* que le(s) a recherché(s) doi(ven)t satisfaire. (Indication : utilisez ∂f.) Prouvez l'existence d'un a qui vérifie cette condition nécessaire.

(c) Donnez une *condition suffisante* pour que a soit minimum local de f.

(d) Écrivez une routine qui, étant donné un nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,N}$, où $N \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $x_i > 0$ et $y_i > 1$, retourne une valeur de a qui vérifie la condition nécessaire et la condition suffisante. Expliquez votre démarche.

(e) Écrivez ci-dessous la valeur de a trouvée pour les deux nuages de points donnés par les fichiers qui vous ont été transmis (leur format est le même qu'au TP2).

Réponses numériques :

fichier 1	$a =$
fichier 2	$a =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Introduction à l'**Analyse Numérique**

Examen (25 août 2011)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : ________

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Chacune des questions ci-dessous exige des explications mathématiques et algorithmiques. Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses (sur les feuilles qui suivent et qui doivent être rendues à la fin de chaque partie de l'examen) en veillant tout particulièrement à la qualité de vos justifications. Justifier le choix d'un algorithme, les raisons pour lesquelles il doit fonctionner sur les données de la question,... est très important. Si vous hésitez quant à la nécessité de justifier un point précis, n'hésitez pas à demander.
- La qualité du *code* influencera votre note. Veillez à respecter les conseils donnés durant l'année : bonne factorisation, emploi de structures de données adaptées, interfaces cohérentes, documentation appropriée,...
- L'examen se déroule en deux parties. À la fin de chaque partie, vous *devez* remettre l'ensemble du code qui vous a permis de répondre aux questions (nous devons *pouvoir reproduire* votre démarche) ainsi que les fichiers additionnels demandés dans le corps des questions. Si une librairie utilisée n'a pas été écrite par vous, le(s) fichier(s) la contenant doi(ven)t mentionner explicitement son origine.
- Un système de gestion de compilation sera présent tel qu'exigé aux TPs durant l'année (`ant` pour JAVA, `make` ou `omake` pour C, C++, FORTRAN, OCAML,...).
- Si vous faites cet examen sur votre propre ordinateur, vous consentez implicitement aux règles suivantes :
  - Toute émission sans fil émanant de votre ordinateur ou de votre téléphone portable a pour conséquence votre exclusion immédiate et votre échec ;
  - En cas de suspicion de fraude, vous autorisez (et fournissez) un accès illimité à votre machine. Les informations qui seront rendues publiques seront uniquement celles qui seront utiles dans le cadre de la preuve de la fraude (si avérée) ;
  - Vous êtes responsables de votre ordinateur et êtes sensés savoir effectuer les manœuvres nécessaires pour réaliser le travail. Le prétexte de la défaillance de votre machine ou de votre incapacité à realiser certaines manipulations pour « excuser » votre échec n'est pas recevable.

---

2 Deuxième partie

Question 1.

Félicitations ! Vous avez été choisi pour poser le vaisseau Apollo sur la lune ! Nul doute que ce sera la mission la plus périlleuse de votre carrière, non seulement à cause des conditions de pilotage particulières — il vaudrait mieux ne pas écraser la navette sur le sol lunaire — mais également à cause des ressources en carburant limitées. Heureusement, pour vous aider, la Nasa a développé un modèle qui permet de vous entraîner sur des simulations.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Pour simplifier, on considère que la position du vaisseau est donnée par sa hauteur y au dessus de la lune. Nous ne nous intéresserons pas aux déplacements dans les autres directions[1] ; la trajectoire sera donc décrite par une fonction $t \mapsto y(t)$. Au départ, l'altitude du vaisseau est de 2100 m et sa vitesse est de -37 m/s. Deux forces agissent sur le vaisseau. D'une part, il y a l'attraction de la lune donnée par $-mg_{\text{lune}}$ où m est la masse du vaisseau et g_{lune} est l'accélération gravitationnelle de la lune ($g_{\text{lune}} \approx 1{,}63\,\text{m}/\text{s}^2$, soit environ 16,6% de celle de la terre). D'autre part, il y a la poussée exercée par les réacteurs. Nous la noterons α. C'est la force que le pilote contrôle. Elle peut bien entendu varier au cours du temps. Il ne faut cependant pas oublier qu'utiliser les réacteurs consomme du carburant et donc change la masse m du vaisseau. En première approximation, on peut supposer que le changement de masse est proportionnel à la poussée. L'ensemble de ces considérations donne lieu aux équations :

$$\begin{cases} m(t)\,\partial_t^2 y = -m(t)g_{\text{lune}} + \alpha(t) \\ \partial_t m(t) = -k\alpha(t) \end{cases} \tag{1}$$

Pour les questions suivantes, on sait que la masse du vaisseau à vide est de 6531 kg, qu'au début de l'alunissage il reste 6000 kg de carburant et que $k \approx 10^{-3}$.

(a) Si le vaisseau est laissé en chute libre ($\alpha = 0$), donnez le temps (en secondes) de son impact au sol ainsi que la vitesse (en km/h) à ce moment. Détaillez vos calculs ci-dessous.

Réponses numériques :

t_{impact}	s
vitesse	km/h

(b) Programmez une routine qui, étant donné α et k, calcule la solution y de (1) satisfaisant les conditions initiales. Faites attention que, quelle que soit la fonction α, lorsque le carburant est épuisé, il ne peut plus y avoir de poussée ! Expliquez comment vous avez tenu compte de cette contrainte.

(c) Sur un même graphe tracez $y(t)$ et $m(t)$, $t \in [0, 100]$, pour $\alpha(t) = 100t^2$.

(d) Le vaisseau a réussi son alunissage si sa vitesse au moment de toucher le sol est $\leqslant 1$ m/s. Si sa vitesse est plus rapide, le vaisseau risque d'être endommagé ce qui compromettrait gravement la mission.[2] En supposant que vous exerciez une poussée constante, i.e. $\alpha(t) = \alpha_0$ pour tout t, quelle doit en être la valeur pour que l'alunissage soit réussi ? Pour ce α_0, quel est le temps nécessaire pour se poser sur la lune et quelle est la masse de carburant utilisée ?

Réponses numériques :

α_0 optimal	N
t_{impact}	s
carburant utilisé	kg

[1] En pratique, cette phase d'alunissage proprement dite est précédée d'une phase de freinage. De plus, seuls les derniers 150 mètres de l'alunissage se font à la verticale mais nous avons ici grandement simplifié le problème.

[2] Évidemment, plus la vitesse est proche de 0, mieux c'est !

Nom :
Prénom :
Section :

INDICATIONS : Pour le α_0 optimal recherché, le temps d'impact est une *racine double* de y, ce qui n'est pas facile à approcher numériquement. Il faut donc reformuler le problème. Voici quelques éléments pour vous y aider (vous n'êtes pas obligés de suivre cette route ; si vous ne le faites pas, veillez à expliquer clairement votre propre démarche).

(i) Tracez divers graphiques de y pour des valeurs de α_0 entre 0 et 30000. Veuillez les joindre à l'archive.

(ii) Au vu de ces images, pouvez vous esquissez (à la main) la courbe correspondant à l'alunissage réussi ?

(iii) Pour d'autres valeurs de α_0 que celle donnant l'alunissage réussi, quelle est la caractéristique du point t_{α_0} qui deviendra le temps d'alunissage ? Définissez clairement le t_{α_0} que vous choisissez (par exemple en disant quelle(s) équation(s) il satisfait). Pouvez vous calculer ce t_{α_0} en fonction de α_0 ?

(iv) Écrivez une équation $f(t_{\alpha_0}) = 0$ qui affirme que t_{α_0} est le temps de l'alunissage réussi.

(v) Résolvez numériquement cette équation. Tracer un graphe de $\alpha_0 \mapsto f(t_{\alpha_0})$ peut vous y aider.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Introduction à l'Analyse Numérique

Examen (26 août 2011)

Nom :

Prénom :

Section : BAC 3 math

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Chacune des questions ci-dessous exige des explications mathématiques et algorithmiques. Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses (sur les feuilles qui suivent et qui doivent être rendues à la fin de chaque partie de l'examen) en veillant tout particulièrement à la qualité de vos justifications. Justifier le choix d'un algorithme, les raisons pour lesquelles il doit fonctionner sur les données de la question,... est très important. Si vous hésitez quant à la nécessité de justifier un point précis, n'hésitez pas à demander.
- La qualité du *code* influencera votre note. Veillez à respecter les conseils donnés durant l'année : bonne factorisation, emploi de structures de données adaptées, interfaces cohérentes, documentation appropriée,...
- L'examen se déroule en deux parties. À la fin de chaque partie, vous *devez* remettre l'ensemble du code qui vous a permis de répondre aux questions (nous devons *pouvoir reproduire* votre démarche) ainsi que les fichiers additionnels demandés dans le corps des questions. Si une librairie utilisée n'a pas été écrite par vous, le(s) fichier(s) la contenant doi(ven)t mentionner explicitement son origine.
- Un système de gestion de compilation sera présent tel qu'exigé aux TPs durant l'année (`ant` pour JAVA, `make` ou `omake` pour C, C++, FORTRAN, OCAML,...).
- Si vous faites cet examen sur votre propre ordinateur, vous consentez implicitement aux règles suivantes :
  - Toute émission sans fil émanant de votre ordinateur ou de votre téléphone portable a pour conséquence votre exclusion immédiate et votre échec ;
  - En cas de suspicion de fraude, vous autorisez (et fournissez) un accès illimité à votre machine. Les informations qui seront rendues publiques seront uniquement celles qui seront utiles dans le cadre de la preuve de la fraude (si avérée) ;
  - Vous êtes responsables de votre ordinateur et êtes sensés savoir effectuer les manœuvres nécessaires pour réaliser le travail. Le prétexte de la défaillance de votre machine ou de votre incapacité à realiser certaines manipulations pour « excuser » votre échec n'est pas recevable.

---

3 Première partie

Question 1. Soit $a \geqslant 0$. Nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} x^2(1-x^2) = (y-1)^2, \\ y = \mathrm{e}^{|ax|}. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Représentez sur un même dessin les courbes de chacune des deux équations du système pour $a = 0$, $a = 0.5$ et $a = 2$.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 3 math	

(b) Donnez les solutions du système pour $a = 0$. Justifiez ci-dessous votre réponse.

Réponse :

$a = 0$	

(c) Soient $b > 0$ et deux fonctions $f, g : [0, b] \to \mathbb{R}$ dérivables sur $]0, b[$ et continues sur $[0, b]$. *Prouvez* que si $f(0) = g(0)$ et $\partial f > \partial g$ sur $]0, b[$, alors 0 est l'unique racine de la fonction $f - g$.

(d) Montrez rigoureusement qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $a \geqslant r$, le système possède une unique solution. (INDICATION : utilisez le point précédent.)

(e) Pour $0 < a < r$, étudiez le nombre de solutions du système. Expliquez votre démarche et prouvez vos affirmations.

(f) Écrivez une routine qui, étant donné $a \geqslant 0$, *retourne* l'ensemble des solutions du système.

(g) Écrivez ci-dessous l'ensemble des solutions de (1) pour $a = 0.5$, $a = 1$ et $a = \mathrm{e}/3$.

Réponses numériques :

$a = 0.5$	
$a = 1$	
$a = \mathrm{e}/3$	

Nom : ....

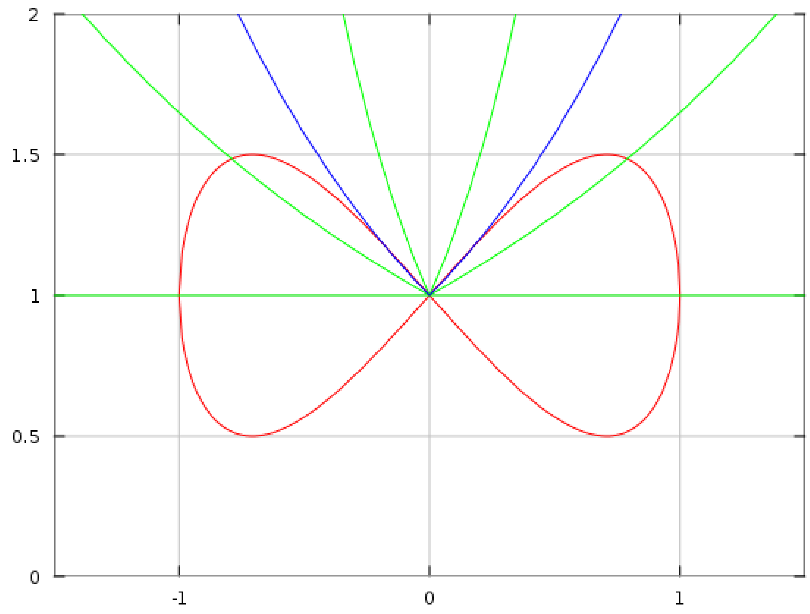
Prénom : ....

Section : BAC 3 math

Question 1 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.

RÉPONSE (à ne lire qu'après avoir essayé par vous même !).

(a) La première courbe de (1) est commune à tous les a, elle est tracée en rouge. La seconde équation est simplement l'exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ lorsque $x \geqslant 0$ qui est « décalquée » par une symétrie orthogonale d'axe y pour les $x \geqslant 0$. Elles sont en vert. La courbe bleue correspond à cette seconde équation pour $a = \mathrm{e}/3$ (pour visualiser une situation du point (g)).



(b) Lorsque $a = 0$, la seconde équation s'écrit $y = 1$. En remplaçant dans la première équation, on trouve : $x^2(1-x^2) = 0$ qui a pour solutions $x = 0$, $x = 1$, et $x = -1$. L'ensemble des solutions dans ce cas est donc $\{(0,1), (1,1), (-1,1)\}$.

(c) Posons $h := f - g$. Comme $\partial h > 0$ sur $]0,b[$ et h est continue sur $[0,b]$, h est strictement croissante sur $[0,b]$ (conséquence du théorème de la moyenne vue au cours d'analyse). Dès lors, pour tout $x \in]0,b]$, $h(0) = 0 < h(x)$. Ceci prouve la thèse.

(d) Posons $r = 1$. Nous allons montrer que, pour $a \geqslant 1$, la seule solution de (1) est $(0,1)$ (on vérifie par simple substitution que $(0,1)$ est solution quel que soit a). Voyez le graphe pour $a = 2$ ci-dessus pour vous imaginer la situation. Commençons par remarquer que (1) est équivalent à

$$\begin{cases} y = 1 + \sqrt{x^2(1-x^2)} \\ y = \mathrm{e}^{|ax|} \end{cases} \tag{2}$$

En effet, si (x,y) est solution de (1), alors $y \geqslant 1$ par la seconde équation. De plus $x^2(1-x^2) \geqslant 0$ par la première. Dès lors, on a $y - 1 = |y-1| = \sqrt{x^2(1-x^2)}$ et (x,y) satisfait (2). (Notons que ceci implique que $x \in [-1,1]$.) Inversement, si (x,y) est solution de (1), alors en élevant au carré $y - 1 = \sqrt{x^2(1-x^2)}$ on obtient la première équation de (1).

Remarquons de plus que le problème est symétrique par rapport à l'axe y ((x,y) est solution si et seulement si $(-x,y)$ est solution). Il suffit donc d'examiner la situation pour $x \geqslant 0$. Posons $f(x) := e^{ax}$ et $g(x) := 1 + \sqrt{x^2(1-x^2)} = 1 + x\sqrt{1-x^2}$. Nous allons montrer[1] que, pour $x > 0$, $\partial f(x) > 1 \geqslant \partial g(x)$ si bien que $x = 0$ sera la seule solution par le point précédent. Pour f, on a $\partial f(x) = e^{ax} a \geqslant e^{ax} > 1$ (car $a \geqslant 1$ et $ax > 0$). Pour g,

$$\partial g(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a $\partial g(x) \leqslant 1$ si et seulement si $1 - 2x^2 \leqslant \sqrt{1-x^2}$. De deux choses l'une. Soit $1 - 2x^2 \leqslant 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon $x^2 < 1/2$ et l'inégalité devient, après élévation au carré et simplification : $(4x^2 - 3)x^2 \leqslant 0$. Celle-ci sera satisfaite si $x^2 \leqslant 3/4$ ce qui est le cas ici car on est dans le cas où $x^2 < 1/2$.

(e) Pour $a \in \,]0,1[$, nous allons montrer que l'ensemble des solutions est $\{(0,1),\ (x^*, e^{ax^*}),\ (-x^*, e^{ax^*})\}$ où x^* est l'unique racine de la fonction $\varphi(x) = e^{ax} - 1 - x\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $]0,1]$.

Par la discussion du point précédent, nous savons que (x,y) est solution de (1) ssi elle est solution de (2), c'est-à-dire ssi

$$\begin{cases} \varphi(|x|) = 0 \\ y = e^{|ax|} \end{cases}$$

Comme le problème est symétrique par rapport à l'axe y, il suffit d'examiner le cas $x \geqslant 0$.

Comme $\varphi(0) = 0$ et $\partial\varphi(0) = a - 1 < 0$, on sait (cours d'analyse) qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(\varepsilon) < 0$. Par ailleurs, $\varphi(1) = e^a - 1 > 0$ (car $a > 0$). Comme φ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence d'une racine dans $]0,1[$.

En ce qui concerne l'unicité de cette racine, la situation est plus délicate. Si vous tracez le graphe de φ, vous verrez qu'elle n'est pas monotone mais qu'elle est convexe. On a

$$\partial^2\varphi(x) = a^2 e^{ax} - \frac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Il suffit de remarquer que $x \in [0,1] \Rightarrow 2x^3 - 3x \leqslant 0$ pour établir que $\partial^2\varphi(x) \geqslant 0$. Comme φ est convexe et qu'il possède deux racines, il n'y en a pas d'autres.

(f) L'algorithme est évident vu l'analyse précédente :

- Si $a = 0$, retourner $\{(0,1),\ (1,1),\ (-1,1)\}$.
- Si $a \in \,]0,1[$, retourner $\{(0,1),\ (x^*, e^{ax^*}),\ (-x^*, e^{ax^*})\}$ où x^* est la racine de la fonction φ sur l'intervalle $[\varepsilon, 1]$ du point précédent. Une manière simple de trouver ε est de diviser un nombre positif x par deux jusqu'à ce que $\varphi(x) < 0$.
- Si $a \geqslant 1$, retourner $\{(0,1)\}$.

[1] Une autre possibilité est de remarquer que $\partial f(0) = a \geqslant 1 = \partial g(0)$, que ∂f est strictement croissante et ∂g est décroissante. Ceci est lié à la — et peut être reformulé en termes de — convexité que nous utiliserons au point suivant.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 3 math

(g) Résultats numériques (approximatifs donc) :

- pour $a = 0.5$, l'ensemble des solutions est $\{(0,1),\ (0.79, 1.484),\ (-0.79, 1.484)\}$
- pour $a = 1$, l'ensemble des solutions est $\{(0,1)\}$.
- pour $a = \mathrm{e}/3$, l'ensemble des solutions est $\{(0,1), (0.1792, 1.176), (-0.1792, 1.176)\}$

Nom :
Prénom :
Section : BAC 3 math

Question 2. En utilisant le principe des « moindres carrés », nous sommes intéressés à approcher au mieux un nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,N}$, où $N \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $x_i > 0$ et $y_i > 1$, par une fonction exponentielle du type $y = \mathrm{e}^{ax}$ où $a \geqslant 0$.

(a) Donnez une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que le minimum de f nous donne le ou les a recherchés.

(b) Donnez une *condition nécessaire* que le(s) a recherché(s) doi(ven)t satisfaire. (Indication : utilisez ∂f.) Prouvez l'existence d'un a qui vérifie cette condition nécessaire.

(c) Donnez une *condition suffisante* pour que a soit minimum local de f.

(d) Écrivez une routine qui, étant donné un nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,N}$, où $N \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, $x_i > 0$ et $y_i > 1$, retourne une valeur de a qui vérifie la condition nécessaire et la condition suffisante. Expliquez votre démarche.

(e) Écrivez ci-dessous la valeur de a trouvée pour les deux nuages de points donnés par les fichiers qui vous ont été transmis (leur format est le même qu'au TP2).

Réponses numériques :

fichier 1	$a =$
fichier 2	$a =$

Nom :
Prénom :
Section : BAC 3 math

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

RÉPONSE (à ne lire qu'après avoir essayé par vous même !).

(a) La méthode des « moindres carrés » consiste à minimiser les distances entre les valeurs de la fonction et les ordonnées des points. En l'occurrence,

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ a \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{e}^{ax_i} - y_i)^2.$$

(Le facteur 1/2 n'est présent que pour que les dérivées soient plus « jolies », il n'est pas essentiel.)

(b) Si a est un minimum de f, cela implique que $\partial f(a) = 0$. Cela nous donne la condition *nécessaire* :

$$\sum_{i=1}^{N}(\mathrm{e}^{ax_i} - y_i)\,\mathrm{e}^{ax_i}\,x_i = 0. \tag{3}$$

Comme $\partial f(0) = \sum_{i=1}^{N}(1-y_i)x_i < 0$ et $\lim_{a\to+\infty}\partial f(a) = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué sur un intervalle $[0,A]$ avec A assez grand pour que $\partial f(A) > 0$) affirme qu'il existe un $a \in \,]0,+\infty]$ tel que $\partial f(a) = 0$.

(c) Une condition *suffisante* pour que a soit un minimum de f est que $\partial f(a) = 0$ *et* $\partial^2 f(a) > 0$. Dans notre cas, cela devient

$$(3) \quad \text{et} \quad \partial^2 f(a) = \sum_{i=1}^{N}(2\,\mathrm{e}^{ax_i} - y_i)\,\mathrm{e}^{ax_i}\,x_i^2 > 0.$$

(d) La routine cherche d'abord un A tel que $\partial f(A) > 0$ (par exemple en doublant une quantité positive jusqu'à ce que ce soit vérifié). Ensuite, par bissection sur $[0,A]$, elle trouve $a > 0$ racine de $\partial f(a) = 0$. Finalement, on vérifie que la condition $\partial^2 f(a) > 0$ est satisfaite et retourne a.

(e) Les valeurs de a trouvées sont, pour le fichier 1, 0.527455 et, pour le fichier 2, 1.29077.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 3 math

Question 3. Considérons l'équation différentielle linéaire

$$-\partial_x^2 u + c(x)u = f(x) \tag{4}$$

où c et f sont deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. On suppose en outre que $c \geqslant 0$ sur $[a,b]$. Nous cherchons une solution $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifie (4) sur $]a,b[$ ainsi que les *conditions au bord* dites de Dirichlet :

$$u(a) = 0 = u(b). \tag{5}$$

On peut montrer qu'une telle solution existe et est unique. Nous sommes intéressés ici par son calcul ou, plus précisément, par son approximation numérique. À cette fin, nous allons fixer $n+1$ points $a = x_0 < x_1 < \cdots < n_{n-1} < x_n = b$ équidistants — c'est-à-dire que $x_i = x_0 + ih$ pour un h indépendant de i — dans l'intervalle $]a,b[$ et nous allons chercher un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\mathbf{u}_i \approx u(x_i)$ pour $i = 0,\dots,n+1$. Cette approximation de u par $\mathbf{u}$ sera la conséquence du fait que $\mathbf{u}$ satisfasse approximativement l'équation. Les conditions au bord (5) sont facilement satisfaites en demandant que $\mathbf{u}_0 = 0 = \mathbf{u}_n$. Pour (4), il faut estimer la valeur de $\partial_x^2 u$ à partir de $\mathbf{u}$. Les notes de cours (annexe B) prouvent que[2] $u[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] = \frac{1}{2}\partial_x^2 u(\xi)$ pour un certain $\xi \in [x_{i-1},x_{i+1}]$. Par conséquent, si h est assez petit, nous décidons d'approcher $\partial_x^2 u(x_i)$ par $2u[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$. En évaluant (4) en chaque x_i et en utilisant cette approximation, nous obtenons le système linéaire

$$-2u[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] + c(x_i)u(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1,\dots,n-1. \tag{6}$$

Comme ce système ne dépend que de $\big(u(x_1),\dots,u(x_{n-1})\big)$, il est facile d'en déduire un système en $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1})$ en remplaçant les $u(x_i)$ par $\mathbf{u}_i$.

(a) Écrivez le système linéaire en $\big(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1}\big)$ qui résulte de (6) par le remplacement précédemment décrit. La fonction u ne doit plus apparaître dans ces équations — seuls restent $\mathbf{u}_i$, h, $c(x_i)$ et $f(x_i)$.

(b) Écrivez explicitement la matrice de ce système dans le cas $n = 5$.

(c) Écrivez une routine qui prend en entrée a, b, les deux fonctions c et f, et n et retourne en sortie le couple[3] $(x,\mathbf{u})$ où $x = (x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ et $\mathbf{u} = \big(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1},\mathbf{u}_n\big)$ est la solution du système linéaire du point (a) satisfaisant l'équivalent de (5).

(d) Testez votre routine, sachant que la fonction $u(x) = \sin(x)$ satisfait $-\partial_x^2 u + u = 2\sin(x)$ et $u(0) = 0 = u(\pi)$. En particulier, vous devez au minimum tracer (et joindre à l'archive !) un graphe comparant u et la solution $\mathbf{u}$ calculée numériquement. Quelle valeur de n choisissez vous ? Un étudiant, désireux d'avoir une grande précision choisit $n = 10000$. Que lui dites vous ? Justifiez votre position.

(e) Ajoutez sur le graphique du point précédent l'approximation de la solution de $-\partial_x^2 u + \sqrt{x}\,u = x^2$ satisfaisant (5).

[2] $u[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$ est la notation usuelle pour les différences divisées.

[3] Si le langage de programmation que vous utilisez ne possède pas la notion de couple, expliquez — sur ces feuilles ! — et *motivez* le choix de programmation que vous faites.

Nom : ....

Prénom : ....

Section : BAC 3 math

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

RÉPONSE (à ne lire qu'après avoir essayé par vous même !).

(a) À partir de la formule des différences divisées, on calcule que

$$u[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] = \frac{u[x_{i-1},x_i] - u[x_i,x_{i+1}]}{x_{i-1}-x_{i+1}} = \frac{\frac{u(x_{i-1})-u(x_i)}{x_{i-1}-x_i} - \frac{u(x_i)-u(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}}{x_{i-1}-x_{i+1}}.$$

Comme les points sont équirépartis, cela devient :

$$u[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] = \frac{\frac{u(x_{i-1})-u(x_i)}{-h} - \frac{u(x_i)-u(x_{i+1})}{-h}}{-2h} = \frac{u(x_{i-1})-2u(x_i)+u(x_{i+1})}{2h^2}.$$

En substituant $u(x_i)$ par $\mathbf{u}_i$ dans (6), on obtient

$$\frac{1}{h^2}(-\mathbf{u}_{i-1}+2\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_{i+1}) + c(x_i)\mathbf{u}_i = f(x_i), \quad i=1,\dots,n-1, \tag{7}$$

sachant que les $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_n$ qui apparaissent dans cette équation doivent être remplacés par 0 (ils ne font donc pas partie des inconnues).

(b) Il suffit d'expliciter les équations (7) et de les mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+c(x_1) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+c(x_2) & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+c(x_3) & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+c(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{pmatrix}$$

(Le but de cette question est de vous faire réaliser la grande régularité de la matrice.)

(c) Il faut écrire un programme qui crée la matrice et le membre de droite du système linéaire et résoudre ce dernier. Pour renvoyer $\mathbf{u}$ comme il est demandé, on prendra soin d'ajouter 0 au début et à la fin du vecteur $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-1})$, solution du système linéaire.

(d) On trace sur un graphique $\sin(x)$ ainsi que les points $(x_i,\mathbf{u}_i)$, $i=0,\dots,n$, obtenus par la routine du point précédent avec $c(x)=1$ et $f(x)=-2\sin x$. La valeur $n=100$ donnera une résolution suffisante. Prendre $n=10000$ n'est pas une bonne idée car le système demande $O(n^3)$ opérations pour être résolu.[4]

(e) Il suffit d'ajouter les points $(x_i,\mathbf{u}_i)$, $i=0,\dots,n$, obtenus par la routine du point (c) avec $c(x)=\sqrt{x}$ et $f(x)=x^2$.

[4] Comme la matrice de ce système est tridiagonale, il existe des méthodes spécifiques pour le résoudre qui n'ont pas ce coût. Nous ne les avons cependant pas vues.

Introduction à l'**Analyse Numérique**

Examen (26 août 2011)

Nom : ________________

Prénom : ______________

Section : BAC 3 math

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Chacune des questions ci-dessous exige des explications mathématiques et algorithmiques. Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses (sur les feuilles qui suivent et qui doivent être rendues à la fin de chaque partie de l'examen) en veillant tout particulièrement à la qualité de vos justifications. Justifier le choix d'un algorithme, les raisons pour lesquelles il doit fonctionner sur les données de la question,... est <u>très</u> important. Si vous hésitez quant à la nécessité de justifier un point précis, n'hésitez pas à demander.
- La qualité du *code* influencera votre note. Veillez à respecter les conseils donnés durant l'année : bonne factorisation, emploi de structures de données adaptées, interfaces cohérentes, documentation appropriée,...
- L'examen se déroule en deux parties. À la fin de chaque partie, vous *devez* remettre l'ensemble du code qui vous a permis de répondre aux questions (nous devons *pouvoir reproduire* votre démarche) ainsi que les fichiers additionnels demandés dans le corps des questions. Si une librairie utilisée n'a pas été écrite par vous, le(s) fichier(s) la contenant doi(ven)t mentionner explicitement son origine.
- Un système de gestion de compilation sera présent tel qu'exigé aux TPs durant l'année (`ant` pour JAVA, `make` ou `omake` pour C, C++, FORTRAN, OCAML,...).
- Si vous faites cet examen sur votre propre ordinateur, vous consentez implicitement aux règles suivantes :
  - Toute émission sans fil émanant de votre ordinateur ou de votre téléphone portable a pour conséquence votre exclusion immédiate et votre échec ;
  - En cas de suspicion de fraude, vous autorisez (et fournissez) un accès illimité à votre machine. Les informations qui seront rendues publiques seront uniquement celles qui seront utiles dans le cadre de la preuve de la fraude (si avérée) ;
  - Vous êtes responsables de votre ordinateur et êtes sensés savoir effectuer les manœuvres nécessaires pour réaliser le travail. Le prétexte de la défaillance de votre machine ou de votre incapacité à realiser certaines manipulations pour « excuser » votre échec n'est pas recevable.

---

4 Deuxième partie

Question 1.

Félicitations ! Vous avez été choisi pour poser le vaisseau Apollo sur la lune ! Nul doute que ce sera la mission la plus périlleuse de votre carrière, non seulement à cause des conditions de pilotage particulières — il vaudrait mieux ne pas écraser la navette sur le sol lunaire — mais également à cause des ressources en carburant limitées. Heureusement, pour vous aider, la Nasa a développé un modèle qui permet de vous entraîner sur des simulations.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 3 math	

Pour simplifier, on considère que la position du vaisseau est donnée par sa hauteur y au dessus de la lune. Nous ne nous intéresserons pas aux déplacements dans les autres directions[1] ; la trajectoire sera donc décrite par une fonction $t \mapsto y(t)$. Au départ, l'altitude du vaisseau est de 2100 m et sa vitesse est de -37 m/s. Deux forces agissent sur le vaisseau. D'une part, il y a l'attraction de la lune donnée par $-mg_{\text{lune}}$ où m est la masse du vaisseau et g_{lune} est l'accélération gravitationnelle de la lune ($g_{\text{lune}} \approx 1{,}63\,\text{m}/\text{s}^2$, soit environ 16,6% de celle de la terre). D'autre part, il y a la poussée exercée par les réacteurs. Nous la noterons α. C'est la force que le pilote contrôle. Elle peut bien entendu varier au cours du temps. Il ne faut cependant pas oublier qu'utiliser les réacteurs consomme du carburant et donc change la masse m du vaisseau. En première approximation, on peut supposer que le changement de masse est proportionnel à la poussée. L'ensemble de ces considérations donne lieu aux équations :

$$\begin{cases} m(t)\,\partial_t^2 y = -m(t) g_{\text{lune}} + \alpha(t) \\ \partial_t m(t) = -k\alpha(t) \end{cases} \tag{1}$$

Pour les questions suivantes, on sait que la masse du vaisseau à vide est de 6531 kg, qu'au début de l'alunissage il reste 6000 kg de carburant et que $k \approx 10^{-3}$.

(a) Si le vaisseau est laissé en chute libre ($\alpha = 0$), donnez le temps (en secondes) de son impact au sol ainsi que la vitesse (en km/h) à ce moment. Détaillez vos calculs ci-dessous.

Réponses numériques :

t_{impact}	s
vitesse	km/h

(b) Programmez une routine qui, étant donné α et k, calcule la solution y de (1) satisfaisant les conditions initiales. Faites attention que, quelle que soit la fonction α, lorsque le carburant est épuisé, il ne peut plus y avoir de poussée ! Expliquez comment vous avez tenu compte de cette contrainte.

(c) Sur un même graphe tracez $y(t)$ et $m(t)$, $t \in [0, 100]$, pour $\alpha(t) = 100t^2$.

(d) Le vaisseau a réussi son alunissage si sa vitesse au moment de toucher le sol est $\leqslant 1$ m/s. Si sa vitesse est plus rapide, le vaisseau risque d'être endommagé ce qui compromettrait gravement la mission.[2] En supposant que vous exerciez une poussée constante, i.e. $\alpha(t) = \alpha_0$ pour tout t, quelle doit en être la valeur pour que l'alunissage soit réussi ? Pour ce α_0, quel est le temps nécessaire pour se poser sur la lune et quelle est la masse de carburant utilisée ?

Réponses numériques :

α_0 optimal	N
t_{impact}	s
carburant utilisé	kg

[1]En pratique, cette phase d'alunissage proprement dite est précédée d'une phase de freinage. De plus, seuls les derniers 150 mètres de l'alunissage se font à la verticale mais nous avons ici grandement simplifié le problème.

[2]Évidemment, plus la vitesse est proche de 0, mieux c'est !

Nom :
Prénom :
Section : BAC 3 math

INDICATIONS : Pour le α_0 optimal recherché, le temps d'impact est une *racine double* de y, ce qui n'est pas facile à approcher numériquement. Il faut donc reformuler le problème. Voici quelques éléments pour vous y aider (vous n'êtes pas obligés de suivre cette route ; si vous ne le faites pas, veillez à expliquer clairement votre propre démarche).

(i) Tracez divers graphiques de y pour des valeurs de α_0 entre 0 et 30000. Veuillez les joindre à l'archive.

(ii) Au vu de ces images, pouvez vous esquissez (à la main) la courbe correspondant à l'alunissage réussi ?

(iii) Pour d'autres valeurs de α_0 que celle donnant l'alunissage réussi, quelle est la caractéristique du point t_{α_0} qui deviendra le temps d'alunissage ? Définissez clairement le t_{α_0} que vous choisissez (par exemple en disant quelle(s) équation(s) il satisfait). Pouvez vous calculer ce t_{α_0} en fonction de α_0 ?

(iv) Écrivez une équation $f(t_{\alpha_0}) = 0$ qui affirme que t_{α_0} est le temps de l'alunissage réussi.

(v) Résolvez numériquement cette équation. Tracer un graphe de $\alpha_0 \mapsto f(t_{\alpha_0})$ peut vous y aider.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 3 math

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : BAC 3 math

Question 1 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

RÉPONSE (à ne lire qu'après avoir essayé par vous même !).

(a) Lorsque $\alpha = 0$, la masse $m > 0$ est constante et y est solution de l'équation $\partial_t^2 y = -g_{\text{lune}}$. Cette équation se résoud par deux intégrations successives, ce qui donne la solution

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t - \tfrac{1}{2} g_{\text{lune}} t^2$$

avec $y_0 = 2100$ et $\dot{y}_0 = -37$. La racine *positive* de $y(t) = 0$ est

$$t_{\text{impact}} = \frac{\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 + 2y_0\, g_{\text{lune}}}}{g_{\text{lune}}} \approx 32.905912\,\text{s}$$

et $\partial_t y(t_{\text{impact}}) = \dot{y}_0 - g_{\text{lune}}\, t_{\text{impact}} \approx -90.6366\,\text{m/s} \approx -326.2918\,\text{km/h}$.

(b) Pour appliquer les méthodes de résolution d'EDO[3] que nous avons vues, il faut « vectorialiser » l'équation (1) en

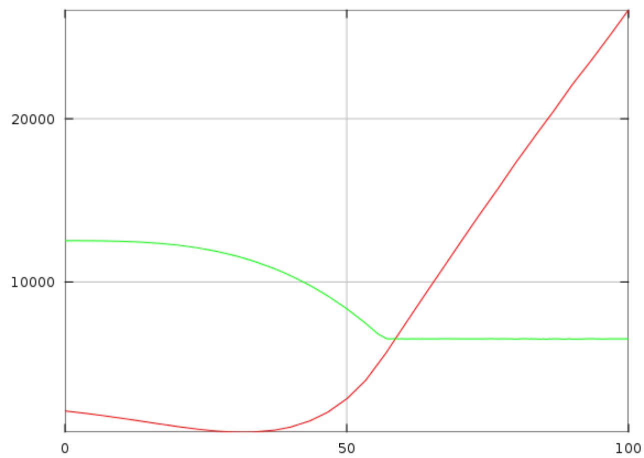
$$\partial_t \begin{pmatrix} y \\ v \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -g_{\text{lune}} + \alpha(t)/m(t) \\ -k\alpha(t) \end{pmatrix}$$

Il y a plusieurs manières de tenir compte du fait que le réservoir soit vide. La plus simple est de dire que si $m \leqslant m_{\text{vide}} := 6531$, il n'y a plus de carburant ce qui implique $\alpha = 0$:

$$\partial_t \begin{pmatrix} y \\ v \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -g_{\text{lune}} + \bar{\alpha}/m(t) \\ -k\bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \bar{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } m(t) \leqslant m_{\text{vide}}, \\ \alpha(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une autre possibilité est de demander à la routine qui résoud l'équation de s'arrêter lorsque $m \leqslant m_{\text{vide}}$. On continue alors avec l'équation où $\alpha = 0$ — ce qu'on peut d'ailleurs faire à la main, vu le point (a) adapté pour les conditions initiales.

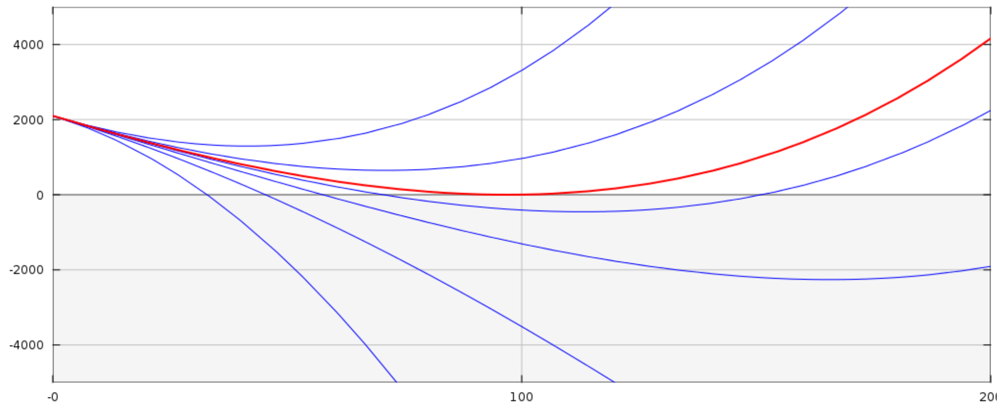
(c) La fonction y est tracée en rouge et m est en vert.



[3] En fait, il est possible de trouver une solution « explicite » par la méthode de variation des constantes. Celle-ci contenant plusieurs intégrales, elle n'aide pas directement à calculer les quantités demandées. Pour α constant, on peut éliminer ces intégrales.

Nom :	
Prénom :	
Section : BAC 3 math	

(d) Nous avons tracé $t \mapsto y(t)$ pour $\alpha_0 \in \{0, 15000, 20000, 22000, 25000, 30000\}$ (lignes bleues). On voit que si la poussée α_0 est suffisamment grande, elle va finir par compenser la vitesse initiale du vaisseau qui va passer par une altitude minimale avant de remonter. Évidemment, à partir d'un certain moment, le réservoir sera vide et le vaisseau tombera alors en chute libre sur la lune.[4] Au temps qui réalise le minimum de y, $\partial_t y = 0$ — la vitesse est nulle ! Or c'est précisément ce qu'on voudrait au moment d'atterrir sur la lune (courbe en rouge). On cherche donc α_0 tel qu'il existe un t qui vérifie *simultanément* $y(t) = 0$ et $\partial_t y(t) = 0$.



Une première approche pour ce faire est, pour un α_0 donné, de calculer r_{α_0}, la première valeur pour laquelle $y(r_{\alpha_0}) = 0$. On peut faire cela en cherchant une racine entre 0 et la valeur qui réalise le minimum de y ; si y n'a pas de minimum, i.e. si α_0 est « petit », on peut rechercher la racine entre 0 et un t tel que $y(t) < 0$ (disons en partant de $t = 1$ et en doublant ce nombre jusqu'à ce que $y(t) < 0$ soit satisfait). Une fois qu'on a ce r_{α_0}, il faut rechercher une racine de la fonction $\alpha_0 \mapsto \partial_t y(r_{\alpha_0})$. Cette méthode sera cependant « lente » car, plus α_0 sera proche de la valeur optimale, plus le nombre d'itérations pour le calcul de r_{α_0} sera important.

Une autre approche est de calculer t_{α_0} comme étant la première racine de $\partial_t y$. C'est facile car $\partial_t y(0) < 0$ et il suffit donc de rechercher un $t > 0$ tel que $\partial_t y(t) > 0$ et d'utiliser une méthode de recherche de racine sur $[0, t]$ (c'est une tâche qu'il fallait également accomplir avec la méthode de paragraphe précédent). Ensuite, il suffit de remarquer que le α_0 optimal est celui pour lequel ce minimum est juste sur le sol ! Ceci signifie qu'on recherche une racine de $\alpha_0 \mapsto y(t_{\alpha_0})$. On l'obtient rapidement par bissection sur $[22\,000, 26\,000]$ (cet intervalle peut être déduit du graphe de la fonction).

Quelle que soit la façon de procéder, on trouve finalement que $\alpha \approx 22903.6$ Newtons. Le temps d'impact est $t_{\text{impact}} \approx 96.9246\,\text{s}$ (pour vérification, on peut y calculer la vitesse qui vaut $\approx 2.12537 \cdot 10^{-7}$) et la quantité de carburant utilisée est d'environ 2219.93 kg.

[4] La modélisation ne prend pas en compte le cas où le vaisseau se libérerait de l'attraction lunaire.