Datation de cadavres

- Mettez au début de chaque fichier source (`.java`, `.ml`, `.mli`, `Makefile`, `.tex`,...) votre nom et prénom. Veuillez vous limiter à des lignes de 80 caractères et à « identer » correctement votre code.
- Ce travail est strictement individuel (en cas de non respect de cette consigne, le travail est nul et non avenu).
- L'architecture, l'élégance et la performance du code sont de première importance.
- Il est bien sûr autorisé de réutiliser le code que votre groupe a développé pendant l'année. Naturellement, le modifier pour tenir compte des remarques qui ont été faites lors des présentations ne peut qu'être en votre faveur.
- Veuillez grouper vos fichiers sous la forme d'un tarball (`.tar.gz`, `.tar.bz2`, `.zip`) — `ant dist` le fait pour vous avec le `build.xml` fourni — et envoyer ce dernier via e-learning. N'envoyez *pas* d'exécutable, la librairie de traçage de graphes (JPlot ou le module gnuplot), ou l'énoncé.
- Le rapport doit être rendu sous forme papier dans mon casier (à la date et heure d'expiration donnés sur le site) ou comme fichier TEX ou PDF joint à l'archive.
- Pour toute question ou problème, vous pouvez nous contacter via le forum `http://math.umh.ac.be/an/forum_etudiants/` ou par email.

Une police moderne et efficace se doit d'utiliser des outils scientifiques pour élucider les affaires criminelles. Lorsqu'un meutre a lieu, il est de première importance de pouvoir déterminer au mieux l'heure de la mort de la personne afin, par exemple, de pouvoir écarter des suspects ceux qui ne pouvaient matériellement se trouver sur le lieu du crime.

Dans les vingt-quatre heures qui suivent la mort, la meilleure méthode de datation du moment de celle-ci est basée sur l'évolution de la température interne du cadavre. Sans les fonctions vitales, l'échange de chaleur entre le cadavre et le milieu ambiant tend à amener le premier à la température du second. La manière la plus simple pour modéliser ce flux thermique est d'utiliser la loi de refroidissement de Newton. Dans notre cas, si T est la température de la pièce en °C (supposée constante) et $f(t)$ est celle du corps (en °C) au temps t, la loi de refroidissement s'écrit $\partial_t f(t) = k\bigl(T - f(t)\bigr)$ où k est un coefficient dépendant du problème. En pratique, cette modélisation n'est cependant pas totalement satisfaisante. On observe en effet que, durant une période pouvant aller d'une demi-heure à trois heures après la mort, la température du cadavre décroît très peu. On ne connait pas vraiment la raison de ce phénomène. Le professeur C. Henssge [1] a proposé la modélisation suivante des données expérimentales (avec les mêmes notations que ci-dessus) :

$$\frac{f(t) - T}{37{,}2 - T} = ab\,\mathrm{e}^{-kt} - a\,\mathrm{e}^{-bkt} \tag{1}$$

où

$$k = \frac{1{,}2815}{M^{0{,}625}} - 0{,}0284\,, \tag{2}$$

t est le temps écoulé depuis la mort (en heures), M est la masse de la personne (en kg), et $a = 0{,}25$, $b = 5$ si $T \leqslant 23$°C, ou $a = 1/9$, $b = 10$ si $T > 23$°C. Bien sûr, divers facteurs correctifs doivent être appliqués pour tenir compte des habits que portait la victime, de la présence ou non de vent,... Nous négligerons ceux-ci dans ce travail.

L'équation (1) peut se réécrire sous la forme

$$f(t) = \alpha\beta\, \mathrm{e}^{-kt} - \alpha\, \mathrm{e}^{-\beta kt} + \gamma \tag{3}$$

pour certains $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in]1, +\infty[$, $k \in]0, +\infty[$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez que la dérivée de f s'annule en zéro (ceci reflète la phase où la température varie peu) et que, pour $\alpha \neq 0$, f est strictement monotone sur $[0, +\infty[$. Justifiez vos calculs.

Pour déterminer le temps de la mort, on mesure la température f^* du corps à un moment t^* et on résout l'équation $f(t) = f^*$. Le moment de la mort est alors $t^* - t$ où t est la solution trouvée.

(b) Donnez une condition nécessaire et suffisante sur f^* (en fonction de α, β, γ et k) pour que l'équation $f(t) = f^*$ admette au moins une solution $t \geqslant 0$.

(c) Montrez que, pour $\alpha \neq 0$, si $f(t) = f^*$ possède une solution positive, alors celle-ci est unique.

(d) Écrivez une routine qui, étant donné f^*, retourne une estimation de $t \geqslant 0$ tel que $f(t) = f^*$, si un tel t existe, ou lève l'exception `Failure` (à définir en JAVA) sinon. Vous devez justifier que la routine que vous avez écrite marche quelle que soit la valeur des paramètres $(\alpha, \beta, \gamma, k) \in]0, +\infty[\times]1, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Veuillez aussi à justifier la précision avec laquelle la solution t est calculée. Finalement, la vitesse de convergence de la méthode utilisée doit être expliquée (plus elle est rapide, mieux c'est).

INDICATIONS *(à prouver si vous les utilisez) :*

- *Quitte à faire un changement de variables, on peut sans perte de généralité supposer que $\alpha = 1$, $k = 1$ et $f^* = 0$.*
- *La méthode de Newton converge au départ du point d'inflexion de f. (Il n'y a pas d'obligation à utiliser la méthode de Newton ; à vous de faire le choix que vous estimez le meilleur afin de répondre le plus complètement possible à la question.)*

(e) Utilisez la routine ci-dessus pour estimer l'heure de la mort d'une personne grâce aux équation (1)–(2). Plus précisément, écrivez un programme, disons `datation`, tel que la ligne de commande

`datation` $M\ T\ t^*\ f^*$

retourne l'heure de la mort. Toutes les heures (aussi bien en entrée qu'en sortie) seront au format `hh:mm` où `hh` sont le ou les digits de l'heure (entre `0` et `23` inclus) et `mm` les deux digits des minutes (de `00` à `59`).

Références

[1] C. HENSSGE, B. KNIGHT, T. KROMPECHER, B. MADEA, L. NOKES : *The estimation of the time since death in the early postmortem period*, Arnold, London, 2002, 2e édition, 271 pp.

Effets de balle en tennis

Devenir un bon joueur de tennis requiert la maîtrise des effets qu'on peut donner à une balle. Dans ce travail, nous examinerons principalement trois coups de base.

- La *frappe à plat*, qui consiste à frapper la balle sans aucun effet (elle ne tourne pas sur elle-même), permet une vitesse de balle importante en sortie de raquette mais oblige dans le même temps le joueur à prendre des risques par rapport au filet (sous peine de voir la balle terminer sa course dans les gradins). La balle perd en moyenne cinquante pourcent de sa vitesse après le premier rebond par rapport à la vitesse en sortie de raquette, ce qui est non négligeable.
- Le *lift* consiste à frapper la balle avec un mouvement qui « enroule » la balle de bas en haut afin de lui infliger une rotation d'arrière en avant (sens anti-trigonométrique par rapport à la direction de la balle). Cet effet permet, à vitesse initiale identique, des trajectoires de balle plus courtes que pour les frappes à plat. Cet effet permet donc au joueur de prendre plus de sécurité par rapport au filet. De plus, au rebond, la balle perd en moyenne moins de vitesse que dans le cas de la frappe à plat (en moyenne : on a une perte de vingt pourcent par rapport à la vitesse en sortie de raquette). Dans certains cas (lobe par exemple), la balle reprendra de la vitesse juste après le rebond (bien entendu ceci est par rapport à la vitesse juste avant l'impact et pas en sortie de raquette). Voilà pourquoi ce genre d'effet minimisant la perte de vitesse est prisé sur des surfaces dites « lentes » (qui occasionnent une grande perte de vitesse après le rebond) comme la terre battue. Le prix à payer d'un tel coup est que le rebond est plus haut que pour une frappe à plat.
- Le *chop* (ou coup coupé — *slice* sans effet latéral) consiste à frapper la balle en l'enroulant de haut en bas afin de lui infliger une rotation d'avant en arrière (sens trigonométrique par rapport à la direction de la balle comme sur la fig. 1). Cet effet ralonge, à vitesse initiale identique, les trajectoires de balles. Néanmoins, la balle coupée perd beaucoup de vitesse à l'impact (une perte moyenne de septante pourcent par rapport à la vitesse en sortie de raquette) et a un rebond généralement moins haut que les deux types d'effet précédents. Cet effet est prisé sur des surfaces rapides pour lesquelles la hauteur des rebonds est petite (le gazon et le tapis par exemple). Notons également que le *chop* est utilisé pour des coups à faible vitesse comme les amorties. En utilisant cet effet, un joueur expérimenté pourra, à faible vitesse, faire revenir la balle vers lui après le rebond.

  Pour être complet, mentionnons que le *slice* est un type d'effet comparable au *chop*, le joueur rajoute juste dans le mouvement un coup de poignet longitudinal permettant à la balle de tourner suivant un angle non nul par rapport à la trajectoire (contrairement aux autres types d'effet). Cet effet permet un changement de direction de la balle après le rebond.

Le phénomène physique qui explique le comportement de la balle est l'effet Magnus. La figure 1 l'illustre dans le cas du *chop* ; pour le *lift*, le principe est le même à partir d'un sens de rotation inversé — les explications et équations ci-dessous par contre valent quel que soit l'effet de balle. L'effet Magnus fonctionne comme suit : le mouvement de rotation de la balle entraîne l'air à sa surface, il s'ensuit que la vitesse apparente de l'air d'un coté de la balle (v_1) est plus grande que de l'autre coté (v_2). Du coté où la vitesse de l'air est plus grande, la pression qu'il exerce est plus petite ce qui engendre une force M qui déplace la balle dans cette direction.

La balle va être repérée par la position x de son centre. Comme cette position varie en fonction du temps, il s'agit en fait d'une fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$. La vitesse de

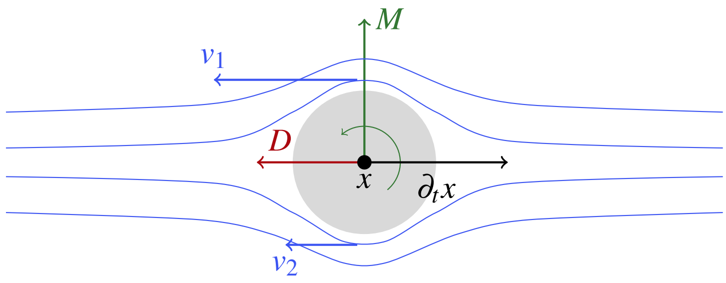

FIG. 1 – Effet Magnus

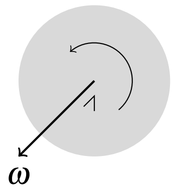

FIG. 2 – Rotation

rotation de la balle est donnée par un vecteur ω sur l'axe de rotation, dont la direction indique le sens de rotation (par la « règle du tire-bouchon »), et dont l'amplitude $|\omega|$ dit si on tourne plus ou moins rapidement. Le vecteur ω est supposé constant jusqu'au premier rebond de la balle, ce qui est raisonnable vu que la durée du mouvement est petite. Avec ces notations, le vecteur M s'écrit :

$$M = \tfrac{1}{2}\rho C_M \pi R^2 |\partial_t x|^2 \frac{\omega}{|\omega|} \times \frac{\partial_t x}{|\partial_t x|} \tag{4}$$

où $\rho \approx 1{,}23\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ est la densité de l'air au niveau de la mer, $R \approx 3{,}35\mathrm{cm}$ est le rayon de la balle, $|\xi|$ est la norme euclidienne du vecteur ξ, et $\times$ désigne le produit vectoriel. La balle est aussi soumise à la résistance de l'air ce qui se traduit par une force D opposée à la direction du mouvement. Celle-ci est donnée par

$$D = -\tfrac{1}{2}\rho C_D \pi R^2 |\partial_t x|^2 \frac{\partial_t x}{|\partial_t x|} \tag{5}$$

Les coefficients C_M et C_D dépendent de la vitesse, de la vitesse de rotation et du rayon de la balle. Ils sont déterminés expérimentalement et, dans des limites raisonnables pour $|\partial_t x|$ et $|\omega|$, sont donnés par :

$$C_M = \frac{1}{2{,}022 + 0{,}981 \cdot q} \qquad \text{et} \qquad C_D = 0{,}508 + \left(\frac{1}{22{,}053 + 4{,}196 \cdot q^{5/2}}\right)^{2/5} \qquad \text{où } q = \frac{|\partial_t x|}{R|\omega|}.$$

Si $\omega = 0$, on convient que $q = +\infty$ et donc que $C_M = 0$ et $C_D = 0{,}508$. Finalement, la balle est également soumise à la force de gravitation. Si l'axe correspondant à la troisième coordonnée est vertical, celle-ci s'écrit $(0,0,-mg)$ où $m \approx 58\mathrm{g}$ est la masse de la balle et $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ est la constante de gravitation terrestre. La loi de Newton donne l'équation qui régit le mouvement :

$$m\partial_t^2 x = (0,0,-mg) + D + M \tag{6}$$

Les dimensions d'un terrain de tennis sont données à la figure 3. Il est à noter que pour un match à deux joueurs, les couloirs latéraux ne sont pas utilisés. La hauteur du filet est, en son centre, de 0,914m et, à ses extrémités, d'environ 1m. Comme tout cable suspendu, le sommet du filet a la forme d'une caténaire.

Imaginons qu'à un moment de la partie, le joueur de gauche se trouve au milieu au fond du court (voir fig. 3). Il frappe la balle devant lui à une hauteur de 0,75m du sol, la renvoyant avec un angle de 10° par rapport à l'horizontale.

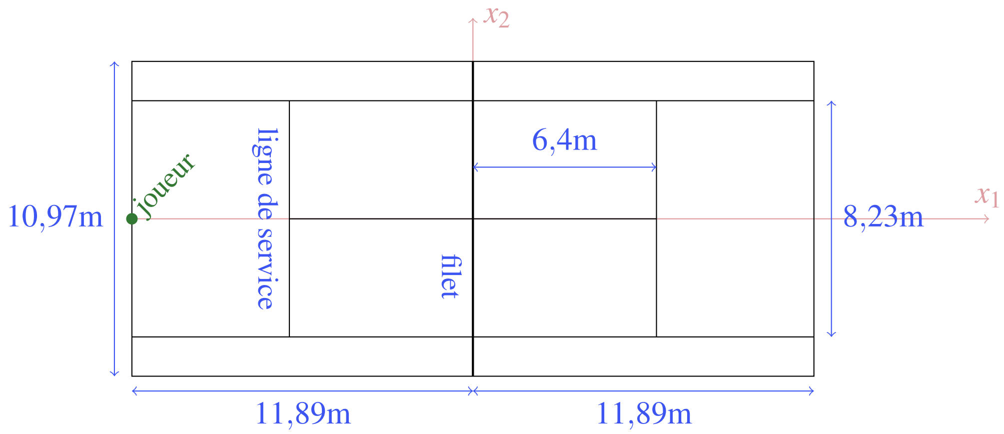

FIG. 3 – Court de tennis

(a) En supposant $C_M = C_D = 0$, donnez la trajectoire de la balle sous forme explicite en fonction de la vitesse initiale $v := |\partial_t x(0)|$.

(b) En supposant qu'il frappe à plat, quelle est la vitesse minimale (resp. maximale) en mètres par seconde qu'il doit donner à la balle pour qu'elle passe le filet (resp. arrive sur le terrain). Dans chaque cas, donnez le temps entre la frappe du joueur et le premier rebond de la balle.

(c) Mêmes questions en supposant que le joueur fait un *lift* imprimant à la balle une rotation dans le plan contenant le joueur et la vitesse initiale de la balle et d'amplitude $|\omega| = 30$.

(d) Mêmes questions en supposant que le joueur fait un *chop* imprimant à la balle une rotation dans le plan contenant le joueur et la vitesse initiale de la balle et d'amplitude $|\omega| = 30$.

(e) BONUS : Répondre aux questions (b)–(d) en supposant que le joueur se trouve toujours au fond du court mais plus nécessairement au milieu.

Références

[1] T. ROPER, Anyone for tennis?, *The Mathematical Gazette*, 1999, Vol. 83 N° 497.

[2] S. M. MOHSIN JAFRI, *Modeling of Impact Dynamics of a Tennis Ball with a Flat Surface*, Master's thesis, Texas A&M University, 2004.