Introduction à l'**Analyse Numérique**

TP n° 3

Noms :
Section :

- Mettez dans le fichier `README` les noms et prénoms des personnes (au maximum trois) du groupe. Dans la documentation de chaque classe (ou module/fonction) mettez un champ `@author` reprenant la ou les personnes qui l'ont écrite.
- L'architecture, l'élégance et la performance du code sont de première importance. Vous devez être capable de justifier tous les choix faits dans votre code.
- N'employez pas des spécificités propres à un système d'exploitation ou à un compilateur. Votre code doit être compilable et exécutable sur MacOS, Unix, et Win32.
- Les interfaces « ligne de commande » sont préférées aux « menus ».
- Faites parvenir vos programmes par le site `https://applications.umons.ac.be/moodleumh/` (sous la forme d'un tarball). Les rapports doivent être remis dans mon casier (ceux en retard ne seront pas acceptés — sauf cas de force majeure).

Souhaitez-vous une défense orale ? OUI – NON

Question 1. Soient $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Rappelons que x_0 est un *vecteur propre* de A associé à la *valeur propre* λ si $Ax_0 = \lambda x_0$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

(a) Montrez que le vecteur $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 999/10 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A de valeur propre $-1/10$.

(b) Considérons la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n + hAu_n = (\mathbb{1} + hA)u_n \end{cases} \tag{1}$$

Cette suite provient de la méthode d'Euler appliquée au problème de Cauchy $\partial_t u = Au$, $u(0) = x_0$. Étudiez la convergence de cette suite pour $h = 1/25$.

(c) Programmez une routine qui trace sur un graphe la suite des points[1] $u_n \in \mathbb{R}^2$ générée directement à partir de leur définition (1). Qu'observez vous ?

(d) Prouvez que

$$(\mathbb{1} + hA)^n = V(\mathbb{1} + hD)^n V^{-1}$$

où V et D sont les matrices

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{999}{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

[1] On identifie les points de $\mathbb{R}^2$ et leur coordonnées dans la base caninique.

Noms :
Section :

vérifiant $A = VDV^{-1}$. Grâce à cette relation, étudiez le comportement de la suite

$$\begin{cases} v_0 \in \mathbb{R}^2 \\ v_{n+1} = v_n + hAv_n = (\mathbb{1} + hA)v_n \end{cases}$$

pour $h = 1/25$. À l'aide de cette étude, expliquez vos résultats numériques obtenus au point précédent.

(e) La disparité constatée entre (b) et (c) se produit-elle pour toutes les valeurs de h ?

Noms :

Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Noms :
Section :

Question 2. Dans cette question, nous allons nous intéresser à une modélisation extrêmement simplifiée d'un jeu de mini-golf. Le parcours est constitué de deux trous.
Pour le premier, le jeu consiste simplement à franchir un plan incliné de 30 degrés. La balle se trouve au sol au bas du plan et le joueur doit la frapper devant lui afin qu'elle atteigne le trou situé au sommet du plan incliné, à une distance de 5 mètres. Nous supposons qu'il n'y a pas de frottement et que la balle (modélisée par un point) se déplace le long du plan. Nous supposons de plus que le joueur frappe dans la direction de pente. Dès lors le mouvement consiste en un déplacement le long d'un droite inclinée comme le montre la figure 1.

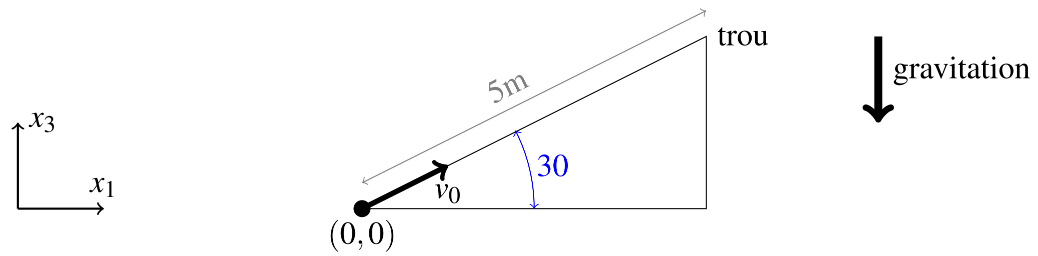

FIGURE 1 – Plan incliné.

(a) Considérant que le joueur frappe la balle afin de lui imprimer une vitesse initiale de $v_0\,\mathrm{m/s}$ dans la direction de la pente, établissez la liste des forces en présence en expliquant leur origine. Ensuite, donnez l'équation différentielle qui est vérifiée par la balle dans le repère (x_1, x_3) (centré au point $(0,0)$). Expliquez et justifiez votre démarche.

(b) Résolvez explicitement l'équation différentielle trouvée. Pour les vitesses initiales $v_0 = 0$, $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$, $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ et $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, dites si la balle atteint le trou ou non. Si oui, en combien de temps[2] ? On considère que la balle de golf a une masse $m \approx 45.93$ g. On rappelle que la constante de gravitation terrestre est $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

vitesse	oui/non	temps
$v_0 = 0$		
$v_0 = 5$		
$v_0 = 10$		
$v_0 = 20$		

(c) Donnez une valeur minimale à v_0 afin que la balle atteigne le trou. Expliquez votre démarche.

v_0 (minimal)	

[2] Indication : l'équation que vous allez naturellement trouver peut posséder deux solutions positives. Il faut que vous disiez celle que vous choisissez et expliquiez pourquoi.

Noms :
Section :

Pour le deuxième trou du parcours, nous considérons que la balle est contrainte de se déplacer sur une *surface* définie de manière paramétrique par la fonction

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : s = (s_1, s_2) \mapsto \sigma(s) = \begin{pmatrix} \sigma_1(s) \\ \sigma_2(s) \\ \sigma_3(s) \end{pmatrix}.$$

Nous supposons que σ est deux fois continûment dérivable et « non-dégénérée » dans le sens où, pour tout s, les vecteurs $\partial_{s_1}\sigma(s) \in \mathbb{R}^3$ et $\partial_{s_2}\sigma(s) \in \mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants.
Décrire le mouvement de la balle le long de cette surface revient à déterminer comment la variable s, qui paramétrise la surface, varie en fonction du temps. Autrement dit, on cherche une fonction

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}$$

telle que $t \mapsto \sigma(S(t))$ donne la trajectoire du mobile dans l'espace. Tenant compte de la force de gravitation ainsi que d'une force de frottement « visqueuse » de direction opposée à la vitesse et d'amplitude μ fois cette vitesse, on trouve que S doit satisfaire l'équation

$$mG(S)\begin{pmatrix} \partial_t^2 S_1 \\ \partial_t^2 S_2 \end{pmatrix} + m\big(\sigma'(S)\big)^T \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{s_i s_j}\sigma(S)\,\partial_t S_i\,\partial_t S_j = -\mu G(S)\partial_t S - \big(\sigma'(S)\big)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

où, pour faciliter la lecture, on a abrégé $S(t)$ en S. Dans cette équation, m est la masse de la balle, $\sigma'(s)$ représente la matrice Jacobienne de σ au point s et la matrice $G(s)$ est celle du produit scalaire dans les coordonnées (s_1, s_2), à savoir :

$$\forall s \in \mathbb{R}^2, \qquad \sigma'(s) = \begin{pmatrix} \partial_{s_1}\sigma_1(s) & \partial_{s_2}\sigma_1(s) \\ \partial_{s_1}\sigma_2(s) & \partial_{s_2}\sigma_2(s) \\ \partial_{s_1}\sigma_3(s) & \partial_{s_2}\sigma_3(s) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad G(s) = \big(\sigma'(s)\big)^T\big(\sigma'(s)\big).$$

(d) PETIT BONUS : Montrez que, pour tout $s \in \mathbb{R}^2$, la matrice $G(s)$ est inversible.[3]

(e) On souhaite utiliser une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 afin d'approximer la solution de l'équation pour une paramétrisation générale σ, partant de $\sigma(s_{01}, s_{02})$ et soumise à une vitesse initiale tangente à la surface : $v_0 = v_{01}\partial_{s_1}\sigma(0,0) + v_{02}\partial_{s_2}\sigma(0,0)$ (avec $v_{01}, v_{02} \in \mathbb{R}$). Le code que vous écrivez doit être paramétré par σ (ainsi que σ' et[4] $s \mapsto \big(\partial_{s_i s_j}\sigma(s)\big)_{i,j=1}^2$), μ, (s_{01}, s_{02}) et (v_{01}, v_{02}).

Expliquez en détail ci-dessous comment vous procédez. En particulier, donnez le champ de de vecteurs auquel vous appliquez Runge-Kutta.

INDICATION : Le code est plus facile à écrire si on utilise des opérations matricielles.

(f) Donnez une fonction σ qui modélise la situation de la figure 1 et refaites le point (c) numériquement. Ceci doit vous permettre de vérifier votre code.

(g) Nous vous offrons une seconde possibilité de vérifier votre code. Pour la fonction $\sigma(s_1, s_2) = (s_1, s_2, s_1^2 + 3s_2^2)$ et $\mu = 0.1$, partir de $S(0) = (1,1)$ avec une vitesse nulle donne $S(3) \approx (0.077, 0.023)$. L'image $S([0,3])$ est dessinée à la figure 2

[3] Ceci ne veut évidemment pas dire que le code doit calculer la matrice inverse de G !
[4] Votre code peut bien entendu faire usage du fait que $\partial_{s_1 s_2}\sigma = \partial_{s_2 s_1}\sigma$ et éviter de stockages redondants.

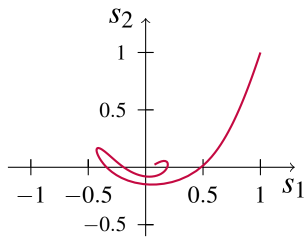

FIGURE 2 – Image $S([0,3])$.

Pour les questions ci-dessous, on va se restreindre à la fonction σ suivante :

$$\sigma(s_1, s_2) = \bigl(s_1, s_2, \exp\bigl(\tfrac{1}{2}(s_2 - s_1^2)\bigr) + s_1^2 + s_2^2\bigr). \tag{2}$$

Nous considérons également que $\mu = 0.1$, que la balle est placée en $\sigma(1,1)$ et que le trou est situé en $\sigma(1/2, -1/2)$.
Bien que ce ne soit pas difficile, il n'est pas nécessaire de justifier que ce σ est deux fois continûment dérivable ni qu'il est non-dégénéré.

(h) Pour la fonction σ définie par (2) explicitez $\sigma'(s)$ ainsi que $\partial_{s_i s_j}\sigma(s)$, $i, j \in \{1,2\}$.

(i) Sur notre parcours du deuxième trou (i.e., avec le σ donné par (2)), le golfeur décide de frapper à une vitesse[5] de $5\,\mathrm{m/s}$ directement dans la direction visuelle du trou, i.e. suivant la direction $\partial_t\bigl(\sigma(1-t, 1-3t)\bigr)\restriction_{t=0}$. La balle atteindra-t-elle[6] le trou ? Nous considérons que le trou est atteint si la balle passe à moins de 5 mm de celui-ci. Si oui, en combien de temps ? Si non, quelle est la plus petite distance (euclidienne dans $\mathbb{R}^3$) entre la balle et le trou le long de la trajectoire ? Y a-t-il un autre angle de frappe qui aurait permis à la balle d'atteindre le trou (si oui, lequel) ?

[5]Cette vitesse est bien entendu mesurée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ — c'est la vitesse du mobile — et non dans l'espace des coordonnées $s \in \mathbb{R}^2$.

[6]Nous nous soucions seulement de passer au dessus du trou, pas de la vitesse que la balle a à ce moment. Pour être réaliste, il faudrait que la vitesse de la balle soit petite mais ça complique davantage le problème.

Noms :

Section :

Question 2 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Noms :

Section :

Question 2 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Noms :
Section :

Question 2 (suite). Continuez votre réponse sur cette page, si nécessaire.