Introduction à l'Analyse Numérique

TP n° 2

Noms :

Section :

- Mettez dans le fichier `README` les noms et prénoms des personnes (au maximum trois) du groupe. Dans la documentation de chaque classe (ou module/fonction) mettez un champ `@author` reprenant la ou les personnes qui l'ont écrite.
- L'architecture, l'élégance et la performance du code sont de première importance. Vous devez être capable de justifier tous les choix faits dans votre code.
- N'employez pas des spécificités propres à un système d'exploitation ou à un compilateur. Votre code doit être compilable et exécutable sur MacOS, Unix, et Win32.
- Les interfaces « ligne de commande » sont préférées aux « menus ».
- Faites parvenir vos programmes par le site `https://applications.umons.ac.be/moodleumh/` (sous la forme d'un tarball). Les rapports doivent être remis dans mon casier (ceux en retard ne seront pas acceptés — sauf cas de force majeure).

Souhaitez-vous une défense orale ? OUI – NON

Question 1. Soit $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mu x - 1$ où $\mu \in \,]1, +\infty[$,

(a) Calculez l'unique point fixe de cette fonction.

(b) Grâce à une routine programmée précédemment, illustrer la construction des suites itératives sur cette fonction au départ du point fixe, pour $\mu = 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Tracez quarante itérations.

(c) En théorie, que devrions nous observer ?

(d) Que constate-t-on numériquement ? Quelle en est la raison ?
(INDICATION : rappelez vous que les ordinateurs calculent en binaire.)

Noms :

Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Noms :

Section :

Question 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Tracez cette fonction sur l'intervalle $[-10^{-15}, 10^{-15}]$. Qu'observez vous ?
- Comment pourriez vous modifier l'expression afin que ce phénomène ne se produise plus ?

Noms :
Section :

Question 3.

(a) Programmez une routine qui accepte en entrée

- n nœuds distincts $x_0,\ x_1,\dots,x_{n-1}$,
- les images $y_0,\ y_1,\dots,y_{n-1}$ de ces nœuds,

et qui retourne un tableau comprenant les différences divisées :

$$f[x_0,x_1,\dots,x_{i-1}], \qquad i=1,\dots,n,$$

où f est une fonction telle que que $f(x_i)=y_i$. Essayez d'utiliser le moins de mémoire possible.

(b) Prouvez l'exactitude de votre routine en déterminant le(s) invariant(s) adéquats.

(c) Grâce à cette routine, tracez sur un même graphe la fonction $\sin(x)$ et son polynôme interpolant sur 10 nœuds équirépartis (comprenant les bords) sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

Noms :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Noms :

Section :

Question 4. Nous avons étudié la méthode des moindres carrés au cours. Ici, nous sommes intéressés par l'étude des moindres carrés à poids. Cette méthode vise à calculer la droite $y = ax + b$ minimisant l'expression $\sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2 \, w(x_i)$, où $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction (le poids, *weight* en anglais) strictement positive.

(a) Trouvez et expliquez de manière détaillée une procédure pour résoudre ce nouveau problème.

(b) Existe-t-il des configurations de points pour lesquelles votre procédure ne marche pas ? Dans ce cas, voyez-vous une manière de trouver quand même cette droite de régression ?

(c) Deux fichiers de points vous a été transmis (`donnees`i`.txt`, $i = 1,\ 2$) qui contiennent le nombre de points N sur la première ligne et « x_i y_i » pour les N lignes suivantes. Implémentez la procédure donnée aux points précédents afin de trouver les droites de régression pour les poids suivants :

- $w(x) = 1$ (les moindres carrés classiques) ;
- $w(x) = \mathrm{e}^{-(x-1)^2}$.

Noms :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Noms :

Section :

Question 5. Soit la matrice $(A_{ij})_{i,j=0,\dots,4}$ définie par $A_{ij} = i^j$ et le vecteur $v = (1, 1, 15, 97, 349)$.

(a) Programmez la méthode de Gauss.

(b) Résolvez, si possible, $Ax = v$. Écrivez la ou les solution(s) avec trois décimales après la virgule ou expliquez pourquoi le système n'est pas résoluble.