UMONS

Introduction à l'Analyse Numérique

TP n°3

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Chacune des questions ci-dessous exige des explications mathématiques et algorithmiques. Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses (en reprenant les lettres qui identifient les questions) en veillant tout particulièrement à la qualité de vos justifications. Justifier le choix d'un algorithme, les raisons pour lesquelles il doit fonctionner sur les données de la question,... est *important*. Si vous hésitez quant à la nécessité de justifier un point précis, n'hésitez pas à demander (par email).
- Tous les *résultats* et *graphiques* générés par ordinateur présents dans votre rapport doivent être produits par du code inclus dans l'archive et le rapport doit dire (au cas par cas) quel programme il faut exécuter pour les obtenir. (Un même programme peut bien entendu générer plusieurs éléments.) La *reproductibilité* de vos résultats est importante.

Le simple déplacement d'une boule sur une surface peut donner lieu à des trajectoires relativement complexes. Dans cette question, nous allons nous limiter au cas bidimensionnel dans lequel la boule se meut le long d'une courbe. Ceci modélise le cas d'une surface horizontale dans la troisième direction pour autant que la vitesse initiale de la boule appartienne à la coupe bidimensionnelle. Nous supposerons toujours être sous l'influence de l'attraction terrestre. [1]

Question 1. Commençons par nous échauffer sur un cas simple ! Supposons qu'il n'y ait pas de frottement et que le mobile est contraint de se déplacer le long d'une droite inclinée (voir Figure 1). Dans cette situation, établissez la liste des forces en présence en expliquant leur origine. Ensuite,

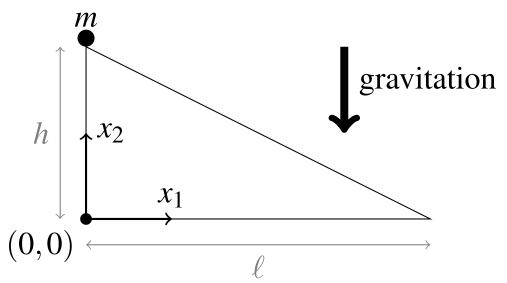

FIGURE 1 – Plan incliné.

donnez l'équation différentielle qui est vérifiée par la position de la boule dans le repère (x_1, x_2). La masse de la boule est notée m. Expliquez et justifiez votre démarche.

Question 2. Résolvez explicitement l'équation différentielle trouvée à la question 1. Expliquez et justifiez votre démarche. De plus, considérant que notre mobile est lâché en haut de la pente avec une vitesse initiale nulle, donnez le temps en secondes dont le mobile a besoin pour arriver en bas de la pente dans le cas particulier où $h = 3$ m, $\ell = 11$ m et $m = 450$ g. Les calculs et la réponse numérique doivent se trouver dans votre rapport.

1. Nous rappelons que la constante de gravitation terrestre g vaut approximativement 9,81 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Considérons maintenant le cas général d'une courbe de $\mathbb{R}^2$. Une façon simple de décrire une telle courbe est de la voir comme le trait laissé par un crayon qui se déplace sur le plan. Pour ce faire, nous allons donc utiliser un « temps abstrait » s, *sans dimension physique*, et à chaque valeur de s assigner une position $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit, la courbe est décrite comme l'image $\operatorname{Im}\gamma$ de la fonction

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \gamma(s) = \big(\gamma_1(s), \gamma_2(s)\big).$$

Cette manière de procéder décrit la courbe sous forme *paramétrique*. Nous supposons que γ est deux fois continuement dérivable. Comme nous voulons pouvoir parler de tangente à $\operatorname{Im}\gamma$, nous allons aussi supposer que [2]

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \|\partial_s \gamma(s)\| \neq 0.$$

Puisque le mobile est contraint de rester sur la courbe $\operatorname{Im}\gamma$, décrire son mouvement revient à déterminer comment la variable s, qui paramétrise la courbe, varie en fonction du temps. Autrement dit, on cherche une fonction

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto S(t)$$

telle que $t \mapsto \gamma(S(t))$ donne la trajectoire du mobile dans l'espace. Tenant compte de la force de gravitation ainsi que d'une force de frottement « visqueuse » de direction opposée à la vitesse et d'amplitude μ fois cette vitesse, on trouve que S doit satisfaire l'équation [3] :

$$\|\partial_s\gamma(S)\|^2\,\partial_t^2 S = -\big(\partial_s\gamma(S)\big|\partial_s^2\gamma(S)\big)\,(\partial_t S)^2 - g\,\partial_s\gamma_2(S) - \frac{\mu}{m}\|\partial_s\gamma(S)\|^2\,\partial_t S \qquad (1)$$

où, pour faciliter la lecture, on a abgrégé $S(t)$ en S.

Question 3. En utilisant la méthode « standard » de résolution des EDO de votre langage de programmation [4], implémentez une routine permettant d'approximer la solution de (1) partant de $\gamma(0)$ avec une vitesse nulle. Celle-ci doit être paramétrée par γ (ainsi que $\partial_s\gamma$ et $\partial_s^2\gamma$) et μ. Elle s'appellera `solution` et se trouvera dans le fichier `trajectoire` (avec l'extension propre à votre langage de programmation). Elle ne sera pas dupliquée pour les questions suivantes.

Question 4. Employez les résultats trouvés au point (2) pour tester votre implémentation. Justifiez dans votre rapport la manière dont vous procédez. Le programme de test s'appellera `test`. [5]

Question 5. Prenons $\gamma(s) = \big(s, (1+\cos(s))\,\mathrm{e}^{-as}\big)$ où $a > 0$. Comme ci-dessus, considérons que le mobile part de $\gamma(0)$ avec une vitesse nulle. Écrivez un programme `time_p1` tel que « `time_p1` m a » retourne avec au moins 8 décimales après la virgule, le temps t_1 nécessaire à un mobile de masse m pour passer pour la première fois par le point minimum p_1 (voir Figure 2) étant donné un coefficient de frottement $\mu = 0{,}3$. Expliquez votre démarche (incluant vos calculs éventuels) dans votre rapport.

Question 6. À partir de maintenant, nous allons faire varier le coefficient de frottement μ. Sur une *même* figure, tracez les graphes des solutions S sur l'intervalle de temps $[0, 30]$ pour [6] 20

2. Nous utilisons la notation $\|x\|$ pour la norme Euclidienne de x.
3. La notation $(x|y)$ désigne le produit scalaire usuel. On a donc $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
4. Spécifiquement, vous devez utiliser `scipy.integrate.odeint` pour Python, `Odepack.lsoda`, du package `odepack`, pour OCaml, ou le package `org.apache.commons.math3.ode` pour Java.
5. Toujours avec l'extension propre à votre langage de programmation.
6. Il est évidemment plus facile de distinguer les courbes si elles sont de couleurs différentes...

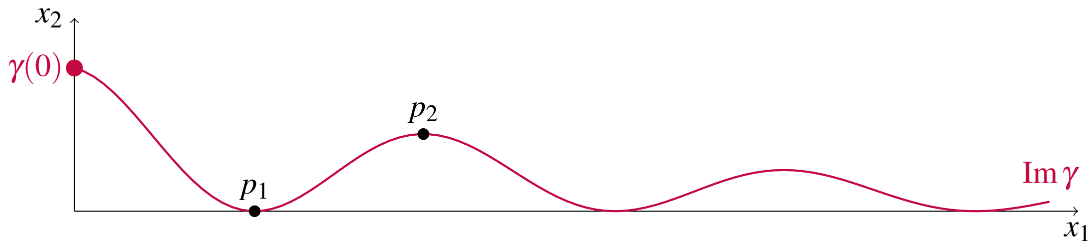

FIGURE 2 – Courbe γ.

valeurs de μ équiréparties entre 0,2 et 0,4 (incluses) pour $a = 0{,}1$ et $m = 1$. Distinguez par deux couleurs différentes les solutions qui passent la bosse p_2 (voir Figure 2) et celles qui restent dans le creux où est p_1. Le graphe final sera joint à votre rapport. Le code qui le génère s'appellera `graph` (et sera bien entendu joint à l'archive).

Question 7. En vous inspirant de la méthode de la bissection, développez une méthode intelligente pour estimer le coefficient de frottement « le plus grand[7] » qu'on peut avoir afin d'aller plus loin que la bosse p_2. Plus précisément, on vous demande de déterminer

$$\mu^* := \sup\{\mu > 0 \mid \exists t > 0,\ S_\mu(t) \text{ soit plus loin que } p_2 \text{ le long de la courbe } \gamma\}$$

où $t \mapsto S_\mu(t)$ est la solution partant de $\gamma(0)$ avec une vitesse nulle. Écrivez un programme `sup_mu` tel que « `sup_mu` m a » retourne (sur sa sortie standard) la valeur de μ^* pour ce m et a. Si μ^* n'existe pas, le programme écrira `AUCUN` sur la sortie standard.

7. Le suprémum définissant μ^* n'est *pas* un maximum alors que le vocable « le plus grand », pris formellement, l'affirme. Dans cette phrase, il faut donc prendre « le plus grand » dans une acceptation plus intuitive.